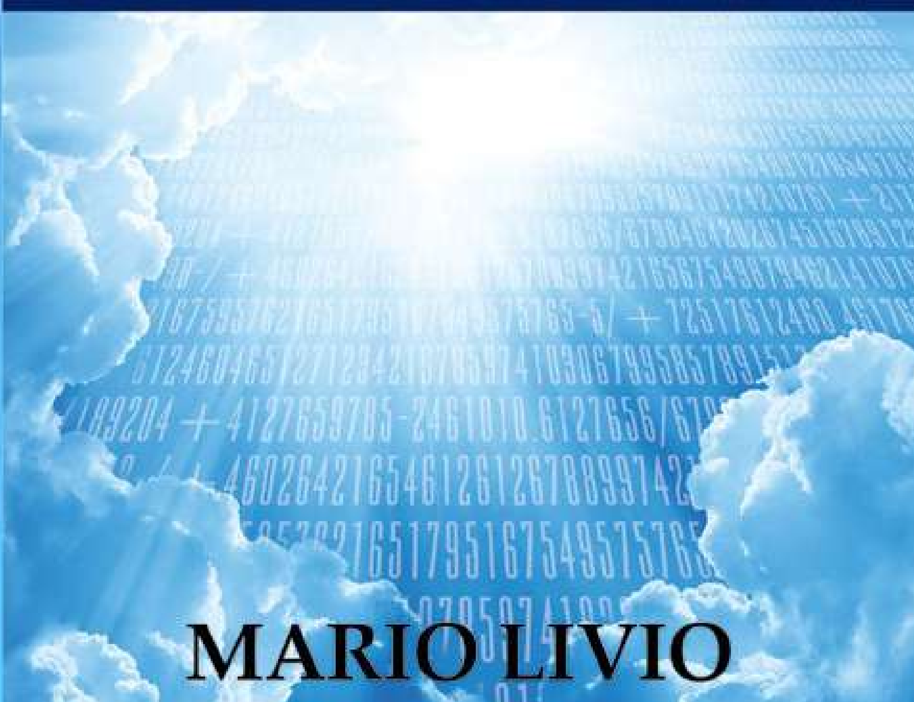
KHOA HỌC KHÁM PHÁ

CHÚA TRỜI CÓ PHẢI LÀ NHÀ TOÁN HỌC?

IS GOD A MATHEMATICIAN?



MARIO LIVIO

NHÀ XUẤT BẢN TRẺ

CHÚA TRỜI
CÓ PHẢI LÀ
NHÀ TOÁN HỌC?

KHOA HỌC KHÁM PHÁ

Chủ biên: VŨ CÔNG LẬP
PHẠM VĂN THIỀU
NGUYỄN VĂN LIỄN

BIỂU GHI BIÊN MỤC TRƯỚC XUẤT BẢN ĐƯỢC THỰC HIỆN BỞI THƯ VIỆN KHTH TP.HCM

Livio, Mario, 1945-
Chúa trời có phải là nhà toán học? / Mario Livio ; ng.d. Phạm Văn Thiều, Phạm Thu Hằng. - T.P. Hồ Chí Minh : Trẻ, 2011.
370tr. ; 20cm. - (Kiến thức bách khoa) (Khoa học và khám phá).
Nguyên bản : Is God a mathematician?.
1. Toán học — Triết học. 2. Nhà toán học — Tâm lý học. 3. Khám phá khoa học. I. Phạm Văn Thiều d. II. Phạm Thu Hằng d. III. Ts: Is God a mathematician?.

510 — dc 22
L788

CHÚA TRỜI
CÓ PHẢI LÀ
NHÀ TOÁN HỌC?

IS GOD A MATHEMATICIAN?

MARIO LIVIO

PHẠM VĂN THIỀU & PHẠM THU HẰNG dịch

NHÀ XUẤT BẢN TRẺ

Tặng Sophie

Mục lục

LỜI TỰA

Khi bạn làm việc trong ngành vũ trụ học - ngành khoa học nghiên cứu về vũ trụ - bạn sẽ thường xuyên nhận được thư, email hay fax hàng tuần được gửi bởi một ai đó muốn mô tả cho bạn lý thuyết về vũ trụ của anh ta (vâng, người gửi luôn là nam giới). Lúc đó sai lầm lớn nhất mà bạn có thể mắc phải đó là trả lời một cách lịch sự rằng bạn muốn có thêm thông tin. Ngay lập tức bạn sẽ bị chìm ngập trong đống thư từ. Vậy làm thế nào để có thể tránh được điều này? Một chiến thuật mà tôi áp dụng rất hiệu quả (ngoại trừ cách hơi bất lịch sự là không trả lời) đó là chỉ ra rằng chừng nào lý thuyết đó không được thể hiện bằng ngôn ngữ chặt chẽ của toán học, thì sẽ không thể nào xác định được tính chính xác của nó. Trả lời như thế hầu như đã chặn đứng hết các nhà vũ trụ học nghiệp dư. Thực tế là nếu như không có toán học, các nhà vũ trụ học hiện đại sẽ không thể tiến thêm một bước nào trên con đường tìm hiểu các định luật của tự nhiên. Toán học cung cấp bộ khung vững chắc để gắn kết bất kỳ một lý thuyết về vũ trụ nào. Điều này có thể không gây ngạc nhiên lắm đối với bạn cho tới khi bạn nhận ra rằng thậm chí bản chất của toán học cũng là chưa hoàn toàn rõ ràng. Như nhà triết học người Anh Sir Michael Dummett đã từng nói: “Hai lĩnh vực trí tuệ trừu tượng nhất, là triết học và toán học, đều gây ra cùng một điều bối rối: *bản chất* của chúng là gì? Sự bối rối này không chỉ là do sự ngu dốt, bởi ngay cả người trong cuộc cũng thấy khó có thể trả lời câu hỏi này.”

Trong cuốn sách này tôi sẽ cố gắng trong khả năng có thể của mình để làm sáng tỏ một số phương diện về bản chất của toán học và đặc biệt là bản chất của mối quan hệ giữa toán học và thế giới mà chúng ta quan sát được. Mục đích của cuốn sách này hoàn toàn không phải là để giới thiệu một cách đầy đủ lịch sử của toán học. Mà thực ra là tôi đi theo trình tự thời gian của sự biến đổi của một số khái niệm có ảnh hưởng trực tiếp đến việc làm rõ vai trò của toán học trong những hiểu biết của chúng ta về vũ trụ.

Rất nhiều người đã có công đóng góp, một cách trực tiếp hay gián tiếp, trong một khoảng thời gian dài cho ý tưởng của cuốn sách này. Tôi muốn cảm ơn Ngài Michael Atiyah, Gia Dvali, Freeman Dison, Hillel Gauchman, David Gross, Ngài Roger Penrose, Huân tước Martin Rees, Raman Sundrum, Max Tegmark, Steven Weinberg và Stephen Wolfram vì những cuộc trao đổi rất hữu ích. Tôi rất biết ơn Dorothy Morgenstern đã cho phép sử dụng toàn bộ câu chuyện về Kurt Godel với Sở Di trú và Nhập tịch Hoa Kỳ. William Christens-Barry, Keith Knox, Roger Easton, và đặc biệt là Will Noel đã có nhã ý kể lại cho tôi quá trình giải mã tấm da tái chế Archimedes. Tôi xin đặc biệt cảm ơn Laura Garbolino đã cung cấp các tài liệu quan trọng và hồ sơ hiếm về lịch sử của toán học. Tôi cũng vô cùng cảm ơn bộ phận lưu trữ đặc biệt của Đại học Johns Hopkins, Đại học Chicago, và Thư viện Quốc gia Pháp đã cung cấp cho tôi các bản viết tay quý hiếm.

Tôi rất biết ơn Stefano Casertano đã giúp dịch các đoạn văn

khó từ tiếng Latinh và Elizabeth Fraser và Jill Lagerstrom trong việc hỗ trợ về ngôn ngữ và thư mục (với nụ cười luôn thường trực trên môi).

Tôi đặc biệt cảm ơn Sharon Toolan vì sự giúp đỡ rất chuyên nghiệp trong việc chuẩn bị bản thảo và Ann Field, Kríta Wildt và Stacey Benn đã giúp tôi vẽ một số hình.

Bất cứ tác giả nào cũng sẽ cảm thấy mình may mắn nếu như có được sự ủng hộ và kiên nhẫn giống như của vợ tôi, Sophie, trong suốt quá trình viết cuốn sách này.

Cuối cùng tôi xin cảm ơn đại diện của tôi, Susan Rabiner, nếu không có sự động viên của cô, cuốn sách này đã không thể hoàn thành. Tôi cũng biết ơn biên tập viên Bob Bender đã đọc bản thảo và góp nhiều ý kiến quý báu, Johanna Li đã hỗ trợ việc xuất bản, Loretta Denner và Amy Ryan đã sửa bông, Victoria Meyer và Katie Grinch đã quảng cáo cho cuốn sách, và toàn bộ nhóm xuất bản và quảng cáo thuộc NXB Simon & Schuster đã làm việc hết mình để đưa cuốn sách này đến tay bạn đọc.

CHƯƠNG 1

MỘT BÍ ẨN

Cách đây vài năm khi tôi nói chuyện ở trường Đại học Cornell, trên một trong các trang soạn thảo để chiếu lên (*slide*) của tôi có dòng chữ: "Phải chăng Thượng đế là nhà toán học?" Ngay khi *slide* này được chiếu lên, tôi nghe thấy một sinh viên ngồi hàng đầu thở hắt ra: "Ôi Chúa ơi, hy vọng là không phải thế!"

Câu hỏi hoa mỹ của tôi không phải là một cố gắng triết học để định nghĩa Thượng đế cho người nghe và cũng chẳng phải là một cách thông minh nhằm hăm dọa những người sợ toán. Thực ra tôi đơn giản chỉ muốn giới thiệu một bí ẩn mà nhiều bộ óc độc đáo nhất đã phải vật lộn nhiều thế kỷ nay - đó là sự hiện diện ở mọi nơi và khả năng dường như là vô hạn của toán học. Đây là những đặc điểm mà người ta thường chỉ gán cho thánh thần. Nhà vật lý người Anh James Jeans từng nói: "Vũ trụ có vẻ như đã được thiết kế bởi một nhà toán học thuần túy". Toán học dường như quá hiệu quả trong việc miêu tả và giải thích không chỉ vũ trụ nói chung, mà cả những hoạt động hỗn độn nhất của con người.

Bất kể là các nhà vật lý đang cố gắng tìm ra một lý thuyết của vũ trụ hay các chuyên viên phân tích thị trường chứng khoán gãi đầu gãi tai để dự đoán vụ sụt giá bất thần sắp tới hay các nhà sinh học thần kinh đang xây dựng mô hình về chức năng của não, hay các nhà tình báo quân đội tìm cách tối ưu hóa việc phân bổ tài lực, tất thảy họ đều phải sử dụng toán học. Hơn nữa, thậm chí nếu họ có áp dụng các hình thức luận được phát triển trong các nhánh khác nhau của toán học thì họ vẫn cứ phải dựa vào cùng một thứ toán học tổng thể và nhất quán. Cái gì đã đem lại cho toán học các quyền năng lớn lao tới mức khó tin nổi như thế? Thậm chí Einstein cũng đã từng tự hỏi: "Làm thế nào mà toán học, một sản phẩm của tư duy con người, hoàn toàn *độc lập với kinh nghiệm* [nhấn mạnh của tác giả], lại có thể tương thích một cách tuyệt vời với các đối tượng của thực tại vật lý đến như vậy?"

Cái cảm giác hoang mang này hoàn toàn không phải là mới. Một số nhà triết học cổ Hy Lạp, mà đặc biệt là Pythagoras và Plato, đã từng kinh sợ trước khả năng rõ ràng của toán học trong việc định hình và dẫn dắt vũ trụ, nhưng dường như lại nằm ngoài khả năng làm thay đổi, dẫn dắt và ảnh hưởng của con người. Nhà triết học chính trị người Anh Thomas Hobbes (1588-1679) cũng không thể che giấu sự ngưỡng mộ của ông. Trong tác phẩm *Leviathan*, một trình bày đầy ấn tượng những cái mà Hobbes coi là nền móng của xã hội và chính phủ, ông đã nêu bật hình học như là hình mẫu của lập luận duy lý:

> Khi nhận ra rằng sự thật nằm ở việc sắp xếp đúng các tên gọi trong những khẳng định của chúng ta, người đi tìm sự thật tuyệt đối cần phải nhớ chính xác ý nghĩa của tất cả các tên gọi mà anh ta sử dụng, và sắp xếp chúng một cách đúng đắn; nếu không anh ta sẽ thấy mình bị vướng

> mắc vào từ ngữ, như gà mắc tóc, càng giãy dụa lại càng bị mắc. Và do đó trong hình học (khoa học duy nhất mà Chúa đã hài lòng ban cho loài người), con người đã bắt đầu bằng cách xác lập ý nghĩa của các từ; sự xác lập những ý nghĩa, mà họ gọi là các định nghĩa, và đặt chúng làm xuất phát điểm của sự tính toán của họ.

Hàng ngàn năm nghiên cứu toán học đầy ấn tượng và tư biện triết học sâu sắc cũng hầu như không làm sáng tỏ thêm được tí nào điều bí ẩn về sức mạnh của toán học. Thậm chí bí ẩn này còn tăng thêm theo một nghĩa nào đó. Chẳng hạn, nhà vật lý toán nổi tiếng của Oxford Roger Penrose không chỉ thấy một mà những ba bí ẩn. Ông nhận thấy không phải chỉ có một mà là có những ba "thế giới": *thế giới những cảm nhận có ý thức của chúng ta*, *thế giới tự nhiên*, và *thế giới Plato của các dạng toán học*. Thế giới đầu tiên là thế giới của tất cả các hình ảnh trong trí óc của chúng ta - chúng ta cảm nhận khuôn mặt con cái chúng ta như thế nào, chúng ta thưởng thức cảnh Mặt trời lặn đầy hấp dẫn ra sao hay chúng ta phản ứng với những hình ảnh khủng khiếp của chiến tranh như thế nào. Đây cũng là thế giới của tình yêu, ghen tị và định kiến cũng như cảm nhận của chúng ta về âm nhạc, mùi vị thức ăn và nỗi sợ hãi. Thế giới thứ hai là thế giới mà chúng ta vẫn gọi là thực tại vật lý. Những bông hoa, vỉ thuốc aspirin, đám mây trắng và những chiếc máy bay phản lực là thuộc thế giới này, cũng như các thiên hà, hành tinh, nguyên tử, trái tim của khỉ dầu chó và bộ não của con người. Thế giới Plato của các dạng toán học, theo Penrose, cũng có một thực tại thực sự như là thế giới tự nhiên và thế giới tinh thần, là đất mẹ của toán học. Đây là nơi ta tìm thấy các số tự nhiên 1, 2, 3, 4,..., tất cả các hình dạng và định lý của hình học Euclid, các định luật về chuyển động của Newton, lý thuyết dây, lý thuyết tai biến và các mô hình toán học mô tả hành trạng của thị trường chứng khoán. Và sau đây là ba bí ẩn theo Penrose. Trước hết, thế giới tự nhiên dường như lại tuân theo các định luật mà thực ra thuộc về thế giới các dạng toán học. Điều này làm cho ngay cả Einstein cũng phải kinh ngạc. Nhà vật lý được giải Nobel Eugene Wigner (1902-95) cũng đã phải thốt lên rằng:

> Phép lạ về sự thích hợp của ngôn ngữ toán học đối với sự phát biểu các định luật của vật lý là một món quà tuyệt vời mà chúng ta không hiểu và cũng không xứng đáng. Chúng ta cần phải biết ơn vì điều đó và hy vọng rằng nó sẽ vẫn đúng đắn với các nghiên cứu trong tương lai và tiếp tục mở rộng ra tất cả các ngành khoa học, bất chấp hậu quả thế nào, vì niềm thích thú của chúng ta, và thậm chí có lẽ cũng khiến ta bối rối nữa.

Thứ hai là chính các trí óc nhận thức - nơi lưu giữ các tri giác có ý thức của chúng ta - bằng cách nào đó lại có thể đột sinh từ thế giới tự nhiên. Vậy *ý thức* được sinh ra từ *vật chất* bằng cách nào? Liệu chúng ta có thể đưa ra một lý thuyết về hoạt động của ý thức một cách mạch lạc và chặt chẽ như lý thuyết về điện từ không? Và cuối cùng cái vòng tròn đó đã đóng lại một cách bí mật. Những trí óc nhận thức này lại có thể thâm nhập một cách thần kỳ vào thế giới toán học bằng cách phát hiện hay sáng tạo ra và trình bày một kho tàng các dạng và khái niệm toán học trừu tượng.

Penrose không đưa ra giải thích cho bất kỳ một bí ẩn nào ở trên. Thay vào đó ông chỉ kết luận một cách cô đọng: "Không nghi ngờ gì nữa, thực sự ra chỉ có *một* thế giới chứ không phải ba, và bản chất thực của nó hiện tại chúng ta thậm chí còn chưa nắm bắt được." Đây là một thú nhận khiếm tốn hơn nhiều so với câu trả lời cho một câu hỏi tương tự của một thầy giáo trong vở kịch *Bốn mươi năm sau* (của nhà viết kịch người Anh Alan Bennett):

> *Foster*: Thưa thầy, em vẫn còn mơ hồ về Chúa ba ngôi.
>
> *Thầy giáo*: Ba là một, một là ba, có gì khó hiểu đâu. Nếu còn nghi ngờ về điều đó thì hãy đến gặp thầy dạy toán của em mà hỏi.

Vấn đề thậm chí còn rắc rối hơn là như tôi vừa trình bày. Thực ra là có hai mặt đối với sự thành công của toán học trong việc giải thích thế giới xung quanh chúng ta (sự thành công mà Wigner gọi là "tính hiệu quả đến mức không thể lý giải nổi của toán học"), mà mặt nào cũng gây ngạc nhiên cả. Đầu tiên là mặt mà ta có thể gọi là "chủ động". Khi các nhà vật lý đi lang thang trong mê cung của tự nhiên, họ dùng toán học để soi sáng lối đi - các công cụ mà họ sử dụng và phát triển, các mô hình mà họ xây dựng và các giải thích mà họ đưa ra, hết thảy đều là toán học về bản chất. Cứ nhìn bề ngoài mà xét thì điều này bản thân nó đã là một sự thần kỳ. Newton đã quan sát một trái táo rơi, và thủy triều trên bãi biển (tôi thậm chí còn không tin ông từng nhìn thấy thủy triều) chứ không phải các phương trình toán học. Thế nhưng bằng cách nào đó ông lại có thể rút ra từ các hiện tượng tự nhiên này các định luật toán học của tự nhiên một cách súc tích, rõ ràng và chính xác đến mức khó tin. Cũng như thế, khi nhà vật lý người

Scotlen James Clerk Maxwell (1831-79) mở rộng khuôn khổ của vật lý cổ điển để thâu tóm được cả *mọi* hiện tượng điện và từ đã được biết đến vào những năm 1860, ông đã làm điều đó mà chỉ sử dụng có bốn phương trình toán học. Hãy dành chút thời gian để suy ngẫm về điều này. Giải thích một tập hợp các thí nghiệm về điện từ và ánh sáng mà trước đấy phải dùng tới hàng tập sách dày cộp để mô tả, giờ rút lại chỉ còn bốn phương trình ngắn gọn. Thuyết tương đối rộng của Einstein thậm chí còn đáng ngạc nhiên hơn nữa - đây là ví dụ tuyệt vời về một lý thuyết toán học chính xác phi thường và nhất quán của một thứ rất cơ bản là cấu trúc của không gian và thời gian.

Nhưng mặt "bị động" của sự bí ẩn về tính hiệu quả đến khó tin của toán học thậm chí còn đáng kinh ngạc hơn mặt "chủ động" rất nhiều. Các khái niệm và quan hệ được nghiên cứu bởi các nhà toán học chỉ dành cho suy luận thuần túy - hoàn toàn không vì bất cứ một ứng dụng thực tế nào - sau hàng chục năm (thậm chí hàng trăm năm) lại trở thành lời giải bất ngờ của các bài toán xuất phát từ thực tại vật lý. Làm sao lại có thể như thế? Để làm ví dụ, hãy xem xét trường hợp thú vị của nhà toán học lập dị người Anh Godfrey Harold Hardy (1877-1947). Ông tự hào về các công trình chỉ là toán học thuần túy của mình đến mức đã tuyên bố một cách hơi khoa trương: "Không một phát minh nào của tôi, dù là trong quá khứ hay tương lai, sẽ có mảy may ảnh hưởng, trực tiếp hay gián tiếp, tốt hay xấu, đến phúc lợi của thế giới." Nhưng ông đã nhầm! Một trong các công trình của ông được tái sinh với tên gọi định luật Hardy-Weinberg [1862-1937], một nguyên lý cơ bản được các nhà di truyền học sử dụng để nghiên cứu sự tiến hóa của các quần thể. Nói một cách đơn giản, định luật Hardy-Weinberg phát biểu rằng nếu một quần thể lớn sinh sản một cách hoàn toàn ngẫu nhiên (đồng thời không xảy ra di cư, đột biến và chọn lọc) thì thành phần gen là bất biến từ thế hệ này sang thế hệ tiếp sau. Thậm chí cả công trình có vẻ như rất trừu tượng của Hardy về *Lý thuyết số* - môn học nghiên cứu các tính chất của các số tự nhiên - cũng đã có ứng dụng thật bất ngờ. Vào năm 1973, nhà toán học người Anh Clifford Cocks đã sử dụng lý thuyết số để tạo ra đột phá trong ngành mật mã - ngành nghiên cứu về mã hóa và giải mã thông tin. Phát minh của Cocks còn làm cho một câu phát biểu khác của Hardy trở nên lỗi thời. Trong cuốn sách nổi tiếng của ông xuất bản năm 1940 với tựa đề *Lời biện minh của một nhà toán học*, Hardy tuyên bố: "Chưa một ai tìm ra được cách ứng dụng lý thuyết số để phục vụ cho mục đích chiến tranh." Rõ ràng Hardy một lần nữa lại mắc sai lầm. Mật mã là cực kỳ quan trọng trong thông tin liên lạc quân sự. Như vậy thậm chí cả Hardy, một trong những người chỉ trích toán học ứng dụng nhiều nhất, lại bị "lôi" (có khi là vừa giãy vừa kêu gào, nếu như ông còn sống) vào việc tạo ra các lý thuyết toán hữu dụng.

Nhưng đây mới chỉ là phần nổi của tảng băng chìm. Kepler và Newton phát hiện ra rằng các hành tinh của hệ Mặt trời chúng ta chuyển động trên các quỹ đạo hình elíp - chính là đường cong đã từng được nhà toán học cổ Hy Lạp Menaechmus (khoảng 350 trước CN) nghiên cứu từ hai nghìn năm trước. Những loại hình học mới được phác họa bởi Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-66) trong một bài giảng đã trở nên kinh điển của ông vào năm 1854 hóa ra lại đúng là công cụ mà Einstein cần có để giải thích cấu trúc của vũ trụ. Một "ngôn ngữ" toán học gọi là lý thuyết nhóm, được phát triển bởi thiên tài trẻ tuổi Evariste Galois (1811-32) đơn giản chỉ là xác định tính giải được của các phương trình đại số nhưng ngày nay đã trở thành ngôn ngữ được các nhà vật lý, kỹ sư, ngôn ngữ học và thậm chí cả các nhà nhân chủng học sử dụng để mô tả mọi thứ đối xứng của thế giới. Hơn nữa, khái niệm hình mẫu đối xứng toán học, theo một nghĩa nào đó, đã làm thay đổi toàn bộ tiến trình khoa học. Trong hàng thế kỷ, con đường tìm hiểu sự vận hành của vũ trụ bắt đầu từ việc thu thập các sự kiện thực nghiệm hay quan sát, rồi từ đó qua thử và sai, các nhà khoa học tìm cách phát biểu các định luật chung của tự nhiên. Cách làm là bắt đầu từ các quan sát cục bộ, rồi từ đó dựng nên trò chơi ghép hình, theo từng mảnh một. Nhưng với sự thừa nhận trong thế kỷ 20 rằng nằm bên dưới cấu trúc của thế giới hạ nguyên tử có các thiết kế toán học rất xác định, nên các nhà vật lý hiện đại ngày hôm nay đã bắt đầu làm ngược lại. Trước hết, họ đưa ra các nguyên lý đối xứng toán học trước và khẳng định rằng các định luật của tự nhiên và do đó các thành phần cơ bản của vật chất cần phải tuân theo một số hình mẫu nhất định, và họ suy ra các định luật tổng quát từ các đòi hỏi này. Nhưng làm sao tự nhiên lại có thể biết để tuân theo các đối xứng toán học trừu tượng đó?

Vào năm 1975, Mitch Feigenbaum, lúc đó mới chỉ là một nhà vật lý toán trẻ làm việc tại Phòng Thí nghiệm Quốc gia Los Alamos, đã thử xem xét hành vi của một phương trình đơn giản với chiếc máy tính bỏ túi HP-65 của mình. Ông nhận thấy rằng một chuỗi các con số xuất hiện trong tính toán càng ngày càng hội tụ về một giá trị đặc biệt: 4,669... Điều đáng kinh ngạc là khi xem xét các phương trình khác con số quái lạ này lại xuất hiện. Feingenbaum nhanh chóng rút ra kết luận rằng phát hiện của ông có tính phổ quát, vì một nguyên nhân nào đó, nó đã đánh dấu sự chuyển tiếp từ có trật tự sang hỗn độn, thậm chí mặc dù ông không giải thích được vì sao. Chả có gì đáng ngạc nhiên khi lúc đầu các nhà vật lý tỏ ra rất nghi ngờ điều này. Xét cho cùng thì chả có lý do gì để cùng một con số lại mô tả được hành vi của các hệ thống có vẻ như hoàn toàn khác nhau này. Sau sáu tháng phản biện về chuyên môn, bài báo đầu tiên của Feingenbaum viết về chủ đề này bị từ chối. Nhưng chỉ không lâu sau, các thực nghiệm cho thấy hêli lỏng khi được đốt nóng từ bên dưới đã xử sự đúng như nghiệm phổ quát của Feingenbaum đã tiên đoán. Và đây không phải là hệ thống duy nhất được tìm thấy là đã xử sự như thế. Con số kỳ lạ của Feingenbaum còn xuất hiện khi có sự chuyển tiếp từ một dòng chảy trật tự sang chảy rối, và thậm chí cả trong hành vi của nước nhỏ giọt từ vòi. Danh sách các “dự đoán” như vậy bởi các nhà toán học về nhu cầu của các ngành khác nhau thuộc thế hệ sau này còn có thể kéo dài dài. Một trong những ví dụ đáng kinh ngạc về sự ảnh hưởng lẫn nhau một cách bí ẩn và bất ngờ giữa toán học và thế giới tự nhiên là câu chuyện về *lý thuyết nút* - ngành toán học nghiên cứu về các nút. Một nút toán học cũng giống như một nút thông thường buộc bằng dây với hai đầu dây được nối với nhau. Tức là, một nút toán học là một đường cong kín không có điểm đầu điểm cuối. Điều kỳ lạ là động lực thúc đẩy sự phát triển của lý thuyết nút bắt nguồn từ mô hình sai lầm về nguyên tử được phát triển vào thế kỷ 19. Sau khi mô hình này bị vứt bỏ - chỉ sau khi ra đời hai thập kỷ - lý thuyết nút tiếp tục tiến hóa như là một nhánh ít người biết đến của toán học thuần túy. Nhưng thật đáng kinh ngạc, sự nỗ lực trừu tượng này đột nhiên lại tìm được những ứng dụng rất sâu rộng trong nhiều lĩnh vực hiện đại từ cấu trúc phân tử của ADN tới lý thuyết dây - lý thuyết tìm cách thống nhất thế giới hạ nguyên tử với hấp dẫn. Tôi sẽ còn trở lại câu chuyện hấp dẫn này ở Chương 8, bởi vì lịch sử vòng quanh của nó có thể là một chứng minh tốt nhất cho việc các nhánh khác nhau của toán học đột sinh như thế nào từ những nỗ lực tìm cách giải thích thế giới tự nhiên, rồi sau đó chúng lang thang như thế nào trong thế giới trừu tượng của toán học, chỉ để rồi sau cùng chúng lại bất ngờ trở về cội nguồn ban đầu của chúng.

Khám phá hay phát minh?

Chỉ với những mô tả ngắn gọn của tôi cho đến đây cũng đã cung cấp những bằng chứng mạnh mẽ về một vũ trụ bị chi phối bởi toán học hay chí ít là có thể phân tích được bằng toán học. Như cuốn sách này sẽ cho thấy, rất nhiều, và thậm chí có thể nói là tất cả, các hoạt động của con người cũng dường như đột sinh từ một cơ sở toán học, ngay cả ở những chỗ ít chờ đợi nhất. Chúng ta hãy xem xét một ví dụ từ thế giới tài chính - công thức tính giá quyền chọn Black-Scholes (1973). Mô hình Black-Scholes đã mang lại cho các tác giả (Myron Scholes và Robert Carhart Merton; còn Fisher Black đã chết trước khi trao giải) giải Nobel về kinh tế. Phương trình chủ yếu của mô hình cho phép hiểu được cách tính giá của các quyền chọn chứng khoán (quyền chọn là các công cụ tài chính cho phép mua hay bán chứng khoán trong tương lai với một giá thỏa thuận trước). Và đây mới là điều gây kinh ngạc: nằm ở trung tâm của mô hình này là một hiện tượng đã được các nhà vật lý nghiên cứu từ nhiều thập kỷ trước - đó là chuyển động Brown, trạng thái chuyển động hỗn loạn của các hạt nhỏ như phấn hoa lơ lửng trong nước hay hạt khói trong không khí. Và không chỉ có thế, chính phương trình này cũng áp dụng được cho chuyển động của hàng trăm nghìn ngôi sao trong các đám sao. Nói theo ngôn ngữ của *Alice trong xứ sở thần kỳ*, thì lẽ nào điều này không phải là "kỳ lạ và càng kỳ lạ" sao? Xét cho cùng thì bất kể vũ trụ có thể làm gì đi nữa, nhưng kinh doanh và tài chính chắc chắn là các thế giới do trí tuệ của con người tạo ra.

Hay hãy lấy một vấn đề thường gặp bởi các nhà sản xuất mạch điện tử và thiết kế máy tính: họ sử dụng khoan laser để đục hàng chục nghìn lỗ trên bản mạch. Để giảm thiểu chi phí, người thiết kế không muốn khoan một cách ngẫu nhiên như một người đi du lịch tự do. Thay vào đó cần phải tìm ra cách di chuyển mũi khoan một cách ít nhất giữa các lỗ, tức là mỗi lỗ chỉ đi qua đúng một lần. Hóa ra, các nhà toán học đã nghiên cứu vấn đề này từ những năm 1920 dưới cái tên *bài toán người bán hàng rong*. Nói một cách nôm na, nếu một người bán hàng hay một nhà chính trị trên đường tranh cử cần phải di chuyển một cách kinh tế nhất giữa một số các thành phố, và nếu chi phí di chuyển giữa hai thành phố là biết trước, thì người đi phải tìm ra cách di chuyển tới tất cả các thành phố một cách tối ưu rồi quay trở về điểm xuất phát. Bài toán này đã được giải với 49 thành phố ở Mỹ vào năm 1954. Đến năm 2004, nó đã được giải với 24.976 thành phố ở Thụy Điển. Nói một cách khác, các công ty sản xuất mạch hay vận tải, và thậm chí các nhà sản xuất máy đánh bạc giống như máy *pinball* ở Nhật Bản (cần phải đóng hàng nghìn cái đinh) đều phải dựa vào toán học để giải quyết các vấn đề tưởng như đơn giản như khoan lỗ, xếp lịch hay thiết kế vật lý các máy tính.

Toán học thậm chí còn thâm nhập cả vào những lĩnh vực, mà theo truyền thống, không liên quan gì đến các khoa học chính xác cả. Chẳng hạn như *Tạp chí Xã hội học toán học* (đến năm 2006 đã xuất bản được 30 kỳ) hướng vào việc tìm hiểu các cấu trúc xã hội phức tạp, các tổ chức và nhóm không chính thống bằng toán học. Các bài báo của tạp chí này đề cập đến các chủ đề từ một mô hình toán học để dự đoán dư luận đến mô hình dự đoán tương tác của các nhóm xã hội.

Theo một hướng khác - từ toán học đến các khoa học nhân văn - lĩnh vực ngôn ngữ điện toán, ban đầu chỉ liên quan đến khoa học máy tính giờ đây đã trở thành lĩnh vực nghiên cứu liên ngành tập hợp các nhà ngôn ngữ, nhà tâm lý nhận thức, nhà lôgic học và các chuyên gia trí tuệ nhân tạo để nghiên cứu sự phức tạp của các ngôn ngữ có liên quan một cách tự nhiên.

Liệu đây có phải là một trò tinh quái để đùa giỡn chúng ta, sao cho mọi vật lộn của con người nhằm ngày càng thâu tóm và hiểu biết được nhiều hơn, cuối cùng, lại dẫn đến phát lộ ra ngày càng nhiều lĩnh vực tinh vi của toán học mà trên đó cả vũ trụ và chúng ta, những sinh vật phức tạp của nó, tất cả đều được tạo ra? Phải chăng toán học, như các nhà giáo dục hay nói, là quyển sách giáo khoa ẩn giấu - quyển sách mà các giáo sư sử dụng để dạy, nhưng chỉ dạy một phần để mình vẫn còn là thông thái hơn? Hay là, nói như phép ẩn dụ của kinh thánh, phải chăng, theo một nghĩa nào đó, toán học là trái tối hậu của cái cây tri thức?

Như tôi đã nhận xét ngắn gọn ở phần đầu của chương này, tính hiệu quả đến khó tin của toán học đã tạo ra nhiều câu đố rất hấp dẫn: Toán học có tồn tại hoàn toàn độc lập với trí óc của con người không? Nói một cách khác, chúng ta đơn giản chỉ là *khám phá* ra các chân lý toán học, như các nhà thiên văn khám phá các thiên hà chưa biết hay toán học không gì khác, chỉ là *phát minh* của con người? Nếu toán học thực sự chỉ tồn tại trong một thế giới trừu tượng thần thoại, thì quan hệ giữa thế giới bí ẩn này với thực tại vật lý là như thế nào? Làm sao bộ não của con người với những hạn chế đã biết của nó lại có thể thâm nhập vào cái thế giới bất biến, nằm ngoài không gian và thời gian đó? Mặt khác, nếu toán học chỉ là do con người tạo ra và chỉ tồn tại trong trí não của chúng ta, thì làm sao ta có thể giải thích được thực tế là sự sáng tạo ra quá nhiều các chân lý toán học này lại có thể dự báo trước một cách thần kỳ các câu hỏi về vũ trụ và cuộc sống con người mà thậm chí hàng thế kỷ sau mới đặt ra? Đây không phải là những câu hỏi dễ trả lời. Như tôi sẽ đề cập thường xuyên trong cuốn sách này, ngay cả các nhà toán học, các nhà khoa học về nhận thức cũng như những triết gia hiện đại cũng không nhất trí với nhau về câu trả lời. Vào năm 1989, nhà toán học Pháp Alain Connes, người đã đoạt hai giải thưởng có uy tín nhất về toán học là Huy chương Field (1982) và Giải thưởng Crafoord (2001), đã phát biểu một cách rất rõ ràng:

> Hãy lấy những số nguyên tố [là số chỉ chia hết cho 1 và chính nó], làm ví dụ. Trong chừng mực mà tôi quan tâm thì những con số này là một thực tại còn vững chắc hơn thế giới vật chất xung quanh chúng ta. Nhà toán học còn

> đang hành nghề giống như người đi thám hiểm thế giới. Người ta khám phá ra các sự thật cơ bản từ kinh nghiệm. Chẳng hạn, bằng những tính toán đơn giản người ta có thể nhận thấy rằng chuỗi các số nguyên tố có vẻ như kéo dài vô hạn. Khi đó, nhiệm vụ của nhà toán học là chứng minh rằng có vô số các số nguyên tố. Đây là điều đã được chứng minh bởi Euclid. Một trong những hệ quả lý thú của chứng minh này là ở chỗ nếu một ngày nào đó có người tuyên bố là đã tìm được số nguyên tố lớn nhất thì có thể dễ dàng chỉ ra rằng anh ta đã sai lầm. Điều này cũng đúng với bất kỳ chứng minh nào khác. Như vậy là chúng ta đã bất ngờ đạt đến một thực tại cũng hoàn toàn không thể chối cãi nổi như là thực tại vật lý vậy.

Martin Gardner, tác giả nổi tiếng của nhiều cuốn sách toán học giải trí, cũng đứng về phía coi toán học là *sự khám phá*. Với ông thì không có gì để nghi ngờ rằng các con số và toán học là luôn tồn tại bất kể con người có biết đến chúng hay không. Ông đã từng nói một cách dí dỏm: "Nếu hai con khủng long gia nhập với hai con khủng long khác ở một khu rừng thưa thì sẽ luôn có bốn con khủng long, ngay cả khi không có con người ở đấy để quan sát và mấy con vật thì quá ngu ngốc để có thể đếm được." Như Connes nhấn mạnh, những người ủng hộ quan niệm toán học là sự khám phá (và như chúng ta sẽ thấy, điều này cũng phù hợp với quan điểm của phái Plato) đã chỉ ra rằng khi một khái niệm toán học cụ thể nào đó được tìm ra, chẳng hạn như các số tự nhiên 1, 2, 3, 4,..., thì chúng ta sẽ gặp các sự thật không thể chối cãi như $3^2 + 4^2 = 5^2$ bất kể chúng ta nghĩ gì về các hệ thức này. Điều đó ít nhất cũng cho ta cảm giác rằng chúng ta đang tiếp xúc với một hiện thực đang tồn tại.

Những người khác lại không đồng ý với điều này. Khi nhận xét về một cuốn sách trong đó Connes trình bày về những ý tưởng này, nhà toán học người Anh Sir Michael Atiyah (người đoạt Huy chương Fields năm 1996 và giải thưởng Abel năm 2004) đã nói:

> Bất kỳ nhà toán học nào cũng phải đồng cảm với Connes. Tất cả chúng ta đều cảm thấy rằng các số nguyên hay các đường tròn là thực sự tồn tại theo một nghĩa trừu tượng nào đó và quan điểm của phái Plato [sẽ được mô tả chi tiết ở chương 2] là rất có sức quyến rũ. Nhưng liệu chúng ta có thực sự bảo vệ được nó không? Nếu như vũ trụ chỉ là một chiều hay thậm chí rời rạc thì khó có thể tượng tượng được hình học làm sao có thể phát triển. Có vẻ như các số tự nhiên có một cơ sở vững chắc hơn, và đếm thực sự là một khái niệm nguyên thủy. Nhưng hãy thử tưởng tượng trí thông minh không nằm ở con người mà ở loài sứa cô đơn và bị cách ly ở dưới đáy sâu của Thái Bình Dương. Nó sẽ không hề có kinh nghiệm gì về các đối tượng cá thể cả, mà chỉ có nước ở xung quanh. Chuyển động, nhiệt độ và áp suất sẽ cung cấp cho nó các dữ liệu cảm giác cơ bản. Trong một môi trường thuần túy liên tục như thế thì sự rời rạc không thể xuất hiện và sẽ chẳng có gì để mà đếm cả.

Và như vậy Atiyah tin rằng con người đã "*tạo ra* [nhấn mạnh của tác giả] toán học bằng cách lý tưởng và trừu tượng hóa các yếu tố của thế giới vật lý.” Nhà ngôn ngữ học George Lakoff và nhà tâm lý học Rafael Núñez cũng đồng ý với quan điểm này. Trong cuốn sách *Toán học từ đâu đến*, họ đã kết luận: “Toán học là một phần tự nhiên của con người. Nó xuất hiện từ cơ thể, bộ não và các kinh nghiệm hàng ngày về thế giới của chúng ta.”

Quan điểm của Atiyah, Lakoff và Núñez lại làm phát sinh một câu hỏi lý thú khác. Nếu như toán học là phát minh (sáng chế) của loài người thì nó có thực sự là phổ quát không? Hay nói một cách khác, nếu như có tồn tại các nền văn minh ngoài Trái đất, thì họ có sáng tạo ra cùng một thứ toán học như của chúng ta không? Carl Sagan (1934-96) đã thường nghĩ rằng câu trả lời là khẳng định. Trong cuốn sách *Vũ trụ* của mình, khi bàn về loại tín hiệu mà một nền văn minh ngoài Trái đất có thể sẽ truyền vào không gian, ông viết: “Nhưng sẽ cực kỳ khó có thể xảy ra khả năng một quá trình vật lý tự nhiên nào đó có thể truyền đi một thông điệp radio mà chỉ chứa các số nguyên tố. Nếu chúng ta nhận được một thông điệp như thế chúng ta sẽ suy ra rằng nền văn minh đó ít ra là rất thích các số nguyên tố.” Nhưng điều đó chắc chắn đến đâu? Trong cuốn sách mới đây *Một kiểu khoa học mới*, nhà vật lý toán Stephen Wolfram đã lý luận rằng cái mà ta gọi là “toán học” có thể chỉ là một khả năng trong rất nhiều “hương vị” của toán học. Chẳng hạn, thay vì sử dụng các quy tắc dựa trên các phương trình toán học để mô tả thế giới tự nhiên, chúng ta có thể sử dụng các loại quy tắc khác được thể hiện trong các chương trình máy tính đơn giản. Hơn nữa, một số nhà vũ trụ học gần đây thậm chí còn đề cập tới khả năng vũ trụ của chúng ta chỉ là một thành viên trong một *đa vũ trụ* - một tập hợp rất lớn các vũ trụ. Nếu một đa vũ trụ như thế thực sự tồn tại, thì liệu chúng ta có thể hy vọng rằng các vũ trụ khác đều có cùng một kiểu toán học như chúng ta chăng?

Các nhà sinh học phân tử và khoa học nhận thức lại đem tới một cách nhìn khác dựa trên những nghiên cứu về các khả năng của não. Đối với một số nhà nghiên cứu đó, toán học không khác biệt nhiều với ngôn ngữ. Nói một cách khác, trong kịch bản *nhận thức* này, sau một thời gian dài quan sát hai tay, hai mắt và hai bầu vú, định nghĩa trừu tượng của số 2 đã ra đời, cũng giống như từ "chim" đã ra đời để mô tả bất kỳ động vật hai cánh biết bay nào. Như nhà thần kinh học người Pháp Pierre Changeux đã nói: "Theo tôi phương pháp tiên đề [như được dùng trong hình học Euclid, chẳng hạn] là cách diễn đạt rõ ràng các chức năng của đại não và những khả năng nhận thức dựa trên việc sử dụng ngôn ngữ của con người". Nhưng nếu toán học chỉ là một kiểu ngôn ngữ thì ta làm sao có thể giải thích được việc trẻ em học ngôn ngữ rất dễ dàng nhưng khá nhiều em lại gặp khó khăn khi học toán? Thần đồng người Scotlen Marjory Fleming (1803-11) đã mô tả một cách rất đáng yêu những khó khăn mà các học sinh thường gặp phải khi học toán. Fleming đã không sống được đến sinh nhật lần thứ 9 của mình nhưng đã để lại một cuốn nhật ký với hơn chín nghìn chữ văn xuôi và năm trăm câu thơ. Trong đó có câu: "Bây giờ mình sẽ nói cho bạn biết căn bệnh khủng khiếp mà bảng cửu chương đã gây ra cho mình; bạn sẽ không thể tưởng tượng nổi đâu. Điều quỷ quái nhất đó là 8 lần 8 và 7 lần 7; cái mà ngay cả tự nhiên cũng không thể chịu đựng được."

Có một số yếu tố trong những câu hỏi rắc rối mà tôi đã đặt ra ở trên có thể viết lại theo một cách khác: Liệu có sự khác biệt về cơ bản giữa toán học với các biểu đạt khác của trí não con người như các nghệ thuật thị giác hay âm nhạc không? Nếu như không có thì tại sao toán học lại biểu lộ tính nhất quán và chặt chẽ mà không một sáng tạo nào khác của loài người có được? Như hình học Euclid chẳng hạn, nó vẫn còn là đúng đắn từ năm 300 trước CN cho đến tận bây giờ; nó đại diện cho "những chân lý" áp đặt lên chúng ta. Ngược lại, chúng ta sẽ không muốn nghe cùng một loại âm nhạc với người Hy Lạp cổ đại cũng như không còn tán đồng với mô hình ngây thơ về vũ trụ của Aristotle.

Rất ít các vấn đề của khoa học hiện đại còn sử dụng các ý tưởng của cách đây ba nghìn năm. Trái lại, những nghiên cứu mới nhất của toán học có thể sử dụng đến các định lý được công bố năm ngoái hay tuần trước, nhưng cũng có thể sử dụng công thức tính diện tích mặt cầu được chứng minh bởi Archimedes khoảng 250 năm trước CN. Mô hình nút của nguyên tử ở thế kỷ 19 chỉ sống sót được gần hai thập kỷ vì các phát hiện mới chứng minh rằng cơ sở của lý thuyết này là không đúng đắn. Khoa học luôn phát triển như thế. Newton đã công nhận (hay là không! xin xem Chương 4) sở dĩ ông có thể nhìn được xa là bởi vì ông đã đứng trên vai những người khổng lồ. Ông đáng nhẽ cũng có thể phải xin lỗi những người khổng lồ này vì đã làm cho các công trình của họ trở nên lỗi thời.

Đây không phải là hình mẫu trong toán học. Mặc dù hình thức luận cần để chứng minh một số kết quả có thể thay đổi, nhưng bản thân các kết quả toán học thì không thay đổi. Thực tế, đúng như nhà toán học và tác gia Ian Steward đã từng viết: "Chỉ có một từ trong toán học để mô tả các kết quả đã tìm ra mà sau đó lại bị thay đổi - đó đơn giản là từ *sai lầm*". Và những sai lầm như vậy bị coi là sai lầm không phải là do các khám phá mới như trong các ngành khoa học khác mà bởi vì sự đối chiếu một cách cẩn thận và chặt chẽ hơn tới cùng các chân lý toán học cũ. Và phải chăng điều này đã thực sự làm cho toán học trở thành ngôn ngữ của Chúa ?

Nếu bạn cho rằng việc hiểu toán học là được khám phá ra hay sáng tạo ra chẳng có gì quan trọng thì hãy thử xét xem sự khác biệt giữa “”khám phá” hay “sáng tạo” sẽ trở nên quan trọng như thế nào trong câu hỏi: Chúa đã được khám phá ra hay được sáng tạo ra? Hay nói một cách khiêu khích hơn: Chúa tạo ra loài người theo hình ảnh của Người hay chúng ta tạo ra Chúa theo hình ảnh của chúng ta?

Tôi sẽ cố gắng tìm câu trả lời cho các câu hỏi khó khăn này (và còn thêm một số câu hỏi khác nữa) trong các chương sau. Trong quá trình đó, tôi sẽ tổng quan lại những ý tưởng sâu sắc nhất trong các công trình của các nhà toán học, vật lý, triết gia, các nhà khoa học nhận thức và ngôn ngữ học nổi tiếng nhất thuộc các thế kỷ đã qua và hiện nay. Tôi cũng sẽ tìm kiếm các ý kiến, những dự báo và cả sự e dè của nhiều nhà tư tưởng hiện đại. Và bây giờ chúng ta hãy bắt đầu cuộc hành trình đầy hứng thú này với các tư tưởng đột phá của một số triết gia rất xa xưa.

CHƯƠNG 2

NHỮNG CON NGƯỜI THẦN BÍ: NHÀ SỐ HỌC VÀ TRIẾT GIA

Con người luôn luôn bị thôi thúc bởi ham muốn tìm hiểu về vũ trụ. Nhưng nỗ lực của họ để hiểu đến ngọn nguồn "Tất cả điều đó có ý nghĩa gì?" đã vượt qua những nỗ lực cần thiết để sinh tồn, để cải thiện tình hình kinh tế hay chất lượng cuộc sống. Điều này không có nghĩa là tất cả mọi người đều chủ động dấn thân vào công cuộc tìm kiếm một trật tự tự nhiên hay siêu hình nào đó. Những cá nhân phải chật vật lo cho cuộc sống khó có điều kiện xa xỉ để suy ngẫm về ý nghĩa của cuộc sống. Trong tập hợp những người săn tìm những hình mẫu nằm sau sự phức tạp không khó nhận thấy của vũ trụ, một số ít người đã nỗi bật hơn hẳn những người khác. Đối với nhiều người, tên tuổi của nhà toán học, khoa học, triết học người Pháp René Descartes (1596-1650) là đồng nghĩa với sự ra đời của triết học của khoa học hiện đại. Descartes là một trong những kiến trúc sư chính của sự chuyển dịch từ việc mô tả thế giới tự nhiên qua các thuộc tính được cảm nhận trực tiếp bởi các giác quan của chúng ta sang các giải thích bằng các đại lượng rất xác định về mặt toán học. Thay vì các tình cảm, mùi vị, màu sắc, và cảm giác được đặc trưng một cách mơ hồ, Descartes muốn các giải thích khoa học phải thăm dò đến tận mức cơ bản sâu xa nhất và phải sử dụng ngôn ngữ toán học:

> Tôi không thừa nhận bất cứ bản chất nào khác trong các vật thể ngoại trừ những thứ mà các nhà hình học gọi là *lượng*, và sử dụng chúng như các đối tượng trong các chứng minh của họ... Và do mọi hiện tượng tự nhiên đều có thể giải thích theo cách này nên tôi nghĩ rằng không cần thiết phải chấp nhận hay mong muốn bất cứ một nguyên lý nào khác trong vật lý.

Điều lý thú là Descartes đã loại bỏ ra khỏi tầm nhìn khoa học rộng lớn của mình thế giới của "tư duy và trí óc", thế giới mà ông cho rằng nó độc lập với thế giới vật chất có thể giải thích bằng toán học. Trong khi không có gì để nghi ngờ rằng Descartes là một trong những nhà tư tưởng có ảnh hưởng lớn nhất trong vòng bốn thế kỷ trở lại đây (và tôi sẽ còn trở lại với ông ở Chương 4), thì ông lại không phải là người đầu tiên đưa toán học vào vị trí trung tâm. Dù bạn có tin hay không thì tùy, nhưng những ý tưởng bao quát về một vũ trụ thấm đẫm và bị chi phối bởi toán học - những ý tưởng mà theo một nghĩa nào đó thậm chí còn đi xa hơn cả những ý tưởng của Descartes - đã được đưa ra từ hơn hai nghìn năm trước, mặc dù mang đậm hương vị thần bí. Người mà truyền thuyết gán cho là đã cảm nhận được rằng linh hồn con người "thật hân hoan" khi dấn thân vào toán học thuần túy, đó chính là nhà toán học Pythagoras đầy bí ẩn.

Pythagoras

Pythagoras (khoảng 572-497 tr. CN) có lẽ là người đầu tiên đồng thời là một triết gia về tự nhiên có ảnh hưởng và một triết gia về tinh thần có uy tín - một nhà khoa học và một nhà tư tưởng tôn giáo. Thực tế, ông là người được cho là đã đưa ra các từ "triết học" *(philosophy)*, với nghĩa là tình yêu sự thông thái, và "toán học" - với nghĩa là các môn học thông thái. Mặc dù không một tác phẩm nào của Pythagoras còn lại đến ngày nay (nếu như chúng đã từng tồn tại, vì chúng chủ yếu được truyền miệng), nhưng chúng ta có tới ba bản tiểu sử chi tiết về Pythagoras, dù chỉ phần nào đáng tin cậy thôi, có từ thế kỷ thứ 3. Bản thứ tư, của một tác giả vô danh được lưu giữ trong các trước tác của giáo trưởng và triết gia người Byzantine tên là Photius (khoảng 820-91 sau CN). Khó khăn chính khi đánh giá các đóng góp cá nhân của Pythagoras là ở chỗ các học trò và môn đồ của ông thường gán tất cả những ý tưởng của họ cho ông. Do đó, ngay cả Aristotle (384-322 tr. CN) cũng thấy khó mà xác định được phần nào trong triết học của Pythagoras là của chính Pythagoras, và vì thế, nói chung, ông thường gọi là "thuộc trường phái Pythagoras" hay "thuộc cái gọi là trường phái Pythagoras". Tuy nhiên, do sự nổi tiếng của Pythagoras trong truyền thống sau này, nói chung, người ta cho rằng ông là người khởi xướng ít nhất là một số thuyết của trường phái này mà Plato và thậm chí cả Copernicus nữa đều cảm thấy phải mang ơn.

Gần như chắc chắn là Pythagoras sinh ra vào đầu thế kỷ thứ sáu trước Công Nguyên ở đảo Samos, ngay cạnh bờ biển của Thổ Nhĩ Kỳ bây giờ. Lúc trẻ ông có thể đã đi rất nhiều nơi, đặc biệt là đã tới Ai Cập và có thể cả Babylon nữa, những nơi mà ít nhất ông đã tiếp thu được một phần kiến thức toán học của mình. Cuối cùng, ông chuyển đến một thuộc địa nhỏ của Hy Lạp ở Croton, gần mũi phía Nam của Italia. Tại đây ông đã nhanh chóng tập hợp được một nhóm các học trò và đệ tử đầy nhiệt huyết.

Nhà sử học người Hy Lạp Herodotus (khoảng 485-425 tr. CN) đã viết về Pythagoras như là "một triết gia giỏi nhất của người Hy Lạp," và triết gia tiền Socrat đồng thời là nhà thơ Empedocles (kh. 492-432 tr. CN) còn bổ sung thêm với sự thán phục: "Nhưng trong số họ có một người vô cùng uyên bác, người có thể hiểu biết sâu sắc về mọi thứ và là một bậc thầy của tất cả các môn nghệ thuật; và bất cứ khi nào thực sự muốn, ông có thể tìm ra một cách dễ dàng mọi chân lý trong mười - không phải, mà là trong hai mươi đời người." Nhưng không phải ai cũng có ấn tượng như thế cả. Trong các nhận xét có vẻ như xuất phát từ sự ganh đua cá nhân, triết gia Heraclitus xứ Ephesus (khoảng 535-475 tr. CN) công nhận hiểu biết rộng của Pythagoras nhưng ông cũng nói thêm một cách miệt thị rằng: "Học nhiều không hẳn đã dạy cho người ta sự thông thái; nếu không nó đã dạy cho Hesiod [một nhà thơ Hi Lạp sống vào khoảng năm 700 trước Công Nguyên] và Pythagoras."

Pythagoras và những người thuộc trường phái Pythagoras thời kỳ đầu không phải là các nhà toán học hay khoa học theo đúng nghĩa. Thay vì đó là một triết học siêu hình về ý nghĩa của các con số ngự trị ở trung tâm các học thuyết của họ. Đối với người thuộc trường phái Pythagoras, các con số vừa là các thực thể sống vừa là các nguyên lý phổ quát thấm đẫm vạn vật từ thiên đường cho đến đạo đức con người. Nói một cách khác, các con số có hai mặt phân biệt và bổ sung lẫn nhau. Một mặt, chúng có sự tồn tại vật lý hữu hình, mặt khác, chúng lại là các quy luật trừu tượng mà mọi thứ được xây dựng trên đó. Chẳng hạn, số 1 (*monad*) vừa là con số sinh ra mọi số khác, là thực thể có thực giống như nước, không khí và lửa là các thành phần cấu tạo nên thế giới vật lý, đồng thời cũng là một ý tưởng - đơn vị siêu hình khởi nguồn của mọi sáng tạo. Nhà lịch sử triết học người Anh Thomas Stanley (1625-78) mô tả một cách tuyệt diệu (dù với tiếng Anh của thế kỷ 17) hai ý nghĩa mà trường phái Pythagoras gán cho các con số:

> Các con số, về bản chất, có hai mặt là Tinh thần (hay phi vật chất) và Khoa học. Tinh thần là thực thể vĩnh hằng của Số, mà Pythagoras trong bài Luận về các Thần đã khẳng định là *nguyên lý may mắn nhất của toàn bộ Trời và Đất, cũng như của tự nhiên*... Đây chính là cái được gọi là *nguyên lý, suối nguồn và gốc rễ của vạn vật*... Còn Số Khoa học là cái mà Pythagoras định nghĩa là *sự mở rộng và nối dài vào hành động của các lý trí hạt giống nằm trong Monad, hay một nhóm các Monad*.

Như vậy các con số không đơn giản chỉ là công cụ để ký hiệu số lượng hay là lượng. Đúng hơn, các con số cần phải được khám phá, và chúng là các tác nhân thành tạo chủ động trong tự nhiên. Mọi thứ trong vũ trụ, từ các đối tượng vật chất như Trái đất đến các khái niệm trừu tượng như công lý, tất tần tật đều hoàn toàn là số.

Việc ai đó thấy rằng các con số rất hấp dẫn và quyến rũ, bản thân nó, không có gì là đáng ngạc nhiên cả. Xét cho cùng thì ngay cả các con số bình thường ta gặp hàng ngày đều có các tính chất lý thú. Chẳng hạn như số ngày trong một năm - 365, bạn có thể dễ dàng kiểm tra thấy rằng 365 là tổng bình phương của ba số liên tiếp: $365 = 10^2 + 11^2 + 12^2$. Nhưng đấy chưa phải là tất cả; nó còn là tổng của bình phương hai số tiếp ngay sau đấy ($365 = 13^2 + 14^2$)! Hay hãy xem xét số ngày trong một tháng theo lịch âm - 28. Số này là tổng của tất cả các ước số của nó: $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$. Các số có tính chất đặc biệt này được gọi là các *số hoàn hảo* (bốn số hoàn hảo đầu tiên là 6, 28, 496, 8218). 28 đồng thời cũng là tổng các lập phương của hai số lẻ đầu tiên: $28 = 1^3 + 3^3$. Thậm chí cả số được sử dụng thường xuyên trong hệ thống thập phân như 100 cũng có tính chất đặc biệt: $100 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3$.

Thôi được, đúng là các con số có thể rất hấp dẫn. Nhưng người ta vẫn có thể còn băn khoăn về nguồn gốc của học thuyết Pythagoras về các con số. Làm thế nào lại có thể xuất hiện ý tưởng cho rằng không chỉ mọi vật đều chứa các con số mà mọi vật đều *là* các con số? Do Pythagoras không viết lại gì hoặc do tất cả đều đã bị phá hủy nên khó có thể trả lời được câu hỏi này. Ấn tượng còn sót lại về các suy luận của Pythagoras đều dựa trên một số ít đoạn rời rạc thuộc thời kỳ tiền Plato và rất muộn sau này, là những cuộc thảo luận, ít đáng tin cậy hơn, chủ yếu của các triết gia theo Plato hay Aristotle. Bức tranh xuất hiện từ sự lắp ghép các manh mối khác nhau gợi ý rằng có thể tìm được nguồn gốc nỗi ám ảnh bởi các con số trong sự bận tâm của những người theo học thuyết Pythagoras với hai hoạt động có vẻ như không liên quan gì với nhau: các thử nghiệm trong âm nhạc và việc quan sát bầu trời.

Để có thể hiểu được làm thế nào lại có mối liên hệ bí ẩn giữa các con số, bầu trời và âm nhạc, chúng ta hãy bắt đầu từ một quan sát lý thú rằng những người theo học thuyết Pythagoras có một cách để *hình dung* các con số bằng các viên sỏi hay các điểm. Chẳng hạn, họ sắp xếp các số tự nhiên 1, 2, 3, 4... như tập hợp các viên sỏi tạo thành hình tam giác (như hình 1). Đặc biệt, tam giác tạo bởi 4 số nguyên đầu tiên (sắp xếp thành tam giác gồm 10 viên sỏi) được gọi là *Tetraktys* (nghĩa là bộ tứ), được những người theo học thuyết Pythagoras coi là biểu tượng của sự hoàn hảo và của các yếu tố chứa đựng nó. Điều này được ghi lại trong câu chuyện kể về Pythagoras của nhà văn trào phúng người Hy Lạp Lucian (khoảng 120-80 sau CN). Pythagoras yêu cầu một người đếm. Khi người đó đếm “1, 2, 3, 4,” Pythagoras bèn ngắt lời anh ta, “Anh có thấy không? Cái mà anh coi là 4 thực ra là 10, một tam giác hoàn hảo và là lời thề của chúng ta.” Triết gia thuộc trường phát tân Plato là Iamblichus (khoảng 250-325 sau CN) đã nói cho chúng ta biết lời thề của người theo thuyết Pythagoras là:

Tôi thề trên sự khám phá ra Tetraktys,
Nguồn gốc của mọi hiểu biết của chúng ta,
Cội nguồn bất diệt của nguồn sống của Tự nhiên.

Hình 1

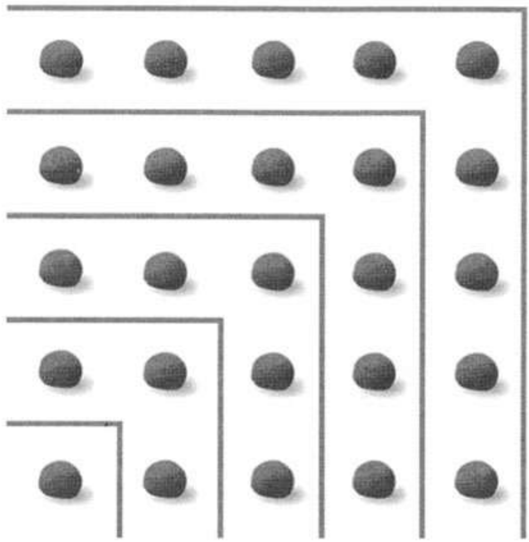
Tại sao Tetraktys lại được coi trọng đến như thế? Bởi dưới con mắt của những người theo học thuyết Pythagoras vào thế kỷ 6 trước Công nguyên, có vẻ như nó đã phác họa ra toàn bộ bản chất của vũ trụ.

Trong hình học - nền tảng mở ra một thời kỳ cách mạng mới về tư tưởng của người Hy Lạp - số 1 được đại diện bởi một điểm •, 2 đại diện bởi một đoạn thẳng , 3 - một mặt phẳng  và 4 - một khối tứ diện ba chiều . Như vậy, Tetraktys dường như đã bao gồm tất cả các chiều cảm nhận được của không gian.

Nhưng đấy mới chỉ là bước đầu. Tetraktys còn xuất hiện đầy bất ngờ trong cách tiếp cận khoa học với âm nhạc. Pythagoras và những người theo ông được coi là đã có công phát hiện rằng nếu chia một dây đàn theo các số nguyên liên tiếp thì sẽ tạo ra các quãng âm du dương - một hiện tượng thường thấy khi biểu diễn bởi một tứ tấu dây. Khi hai dây tương tự nhau được gảy đồng thời thì âm thanh tạo ra sẽ rất dễ nghe nếu như độ dài của các dây theo các tỉ lệ tối giản. Chẳng hạn nếu hai dây có độ dài bằng nhau (tỉ lệ 1:1) sẽ tạo ra cùng một nốt nhạc; tỉ lệ 1:2 tạo ra một quãng tám; 2:3 tạo ra quãng năm hoàn hảo và 3:4 tạo ra quãng bốn. Như vậy, ngoài việc thâu tóm tất cả các thuộc tính về không gian, Tetraktys còn có thể được coi như biểu diễn các tỷ số toán học là nền tảng cho sự hòa hợp của thang âm. Sự kết hợp kỳ diệu của không gian và âm nhạc đã tạo ra cho những người theo học thuyết Pytagoras một biểu tượng mạnh mẽ và cho họ cảm thấy *harmonia* ("hòa hợp với nhau") của *kosmos* ("trật tự đẹp đẽ của vạn vật").

Thế trời nằm ở đâu trong tất cả những thứ đó? Pythagoras và những người đi theo ông đã đóng một vai trò mặc dù không phải là trọng yếu nhưng cũng không thể bỏ qua trong lịch sử của thiên văn học. Họ thuộc những người đầu tiên cho rằng Trái đất là hình cầu (có lẽ chủ yếu là do tính thẩm mỹ toán học cao của hình cầu). Họ cũng có thể là những người đầu tiên tuyên bố rằng các hành tinh, Mặt trời và Mặt trăng có chuyển động riêng độc lập từ tây sang đông, theo chiều ngược với chuyển động quay (biểu kiến) hàng ngày của mặt cầu các ngôi sao cố định. Các nhà quan sát say mê của bầu trời đêm không thể bỏ qua những thuộc tính rõ rệt nhất của các chòm sao - đó là hình dạng và số lượng. Mỗi chòm sao được nhận ra bởi số các ngôi sao hiện diện trong đó và hình dạng tạo bởi chúng. Nhưng hai đặc tính này lại chính là những yếu tố căn bản trong học thuyết Pythagoras về các con số, giống như là Tetraktys vậy. Những người đi theo Pythagoras vô cùng thích thú với sự phụ thuộc của các dạng hình học, các chòm sao và hòa âm vào các con số đến mức các con số trở những thành viên gạch xây nên vũ trụ và đồng thời cũng là các nguyên lý nằm phía sau sự tồn tại của nó. Do vậy không có gì đáng ngạc nhiên khi câu châm ngôn của Pythagoras nhấn mạnh rằng “Vạn vật hợp với nhau về số.”

Chúng ta có thể tìm được bằng chứng cho thấy những người theo học thuyết Pythagoras coi trọng câu châm ngôn này như thế nào từ hai nhận xét của Aristotle. Một là trong tập hợp chuyên luận *Siêu hình*, ông nói: “Những người được gọi là theo học thuyết Pythagoras đã áp dụng chính họ vào toán học, và là những người đầu tiên phát triển khoa học này; và thông qua nghiên cứu nó, họ đã trở nên tin rằng các nguyên lý của nó là nguyên lý của vạn vật.” Trong một đoạn khác, Aristotle mô tả một cách sinh động sự sùng kính các con số và vai trò đặc biệt của Tetraktys: “Eurytus [một học trò của Philolaus - một người theo học thuyết Pythagoras] đã định ra số nào tương ứng với vật gì (chẳng hạn như số này là của người, số kia là của ngựa) và mô phỏng hình dạng của các sinh vật bằng các viên sỏi *theo cách mà người ta biến các con số thành hình*

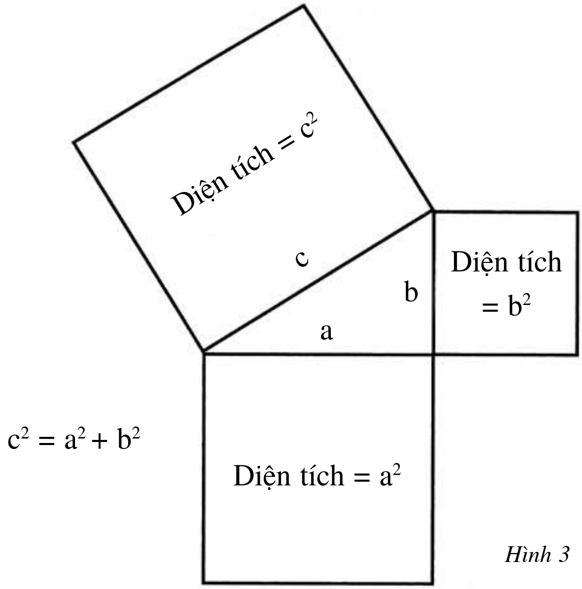


Hình 2

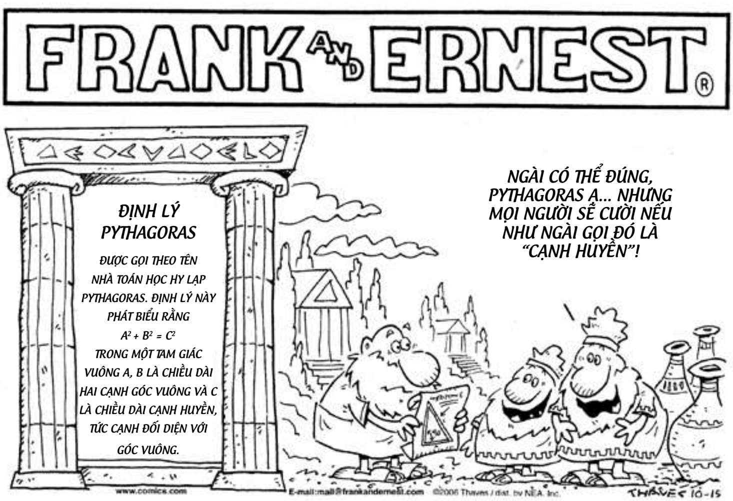
tam giác hay hình vuông.” Câu “hình tam giác hay hình vuông” ám chỉ đến cả Tetraktys và một cấu trúc khác cũng lý thú không kém của những người theo học thuyết Pythagoras đó là *gnomon*.

Từ “*gnomon*” (“vật đánh dấu”) có nguồn gốc từ tên một dụng cụ dùng để đo thời gian thiên văn của người Babylon, tương tự như đồng hồ Mặt trời. Dụng cụ này có khả năng là đã được người thầy của Pythagoras - nhà triết học tự nhiên Anaximander (khoảng 611-547 tr. CN) đưa về Hy Lạp. Không nghi ngờ gì nữa, người học trò đã bị ảnh hưởng bởi các ý tưởng của ông thầy về hình học và ứng dụng của chúng vào vũ trụ học - khoa học nghiên cứu tổng thể về vũ trụ. Sau này từ “gnomon” được dùng để gọi một dụng cụ vẽ các góc vuông tương tự như thước vuông của thợ mộc, hoặc là để chỉ một hình góc vuông mà khi thêm vào một hình vuông sẽ tạo ra một hình vuông lớn hơn (như hình 2). Chú ý rằng nếu bạn thêm vào một hình vuông, chẳng hạn như hình vuông 3×3, 7 viên sỏi tạo thành một góc vuông (một *gnomon*), bạn sẽ nhận được hình vuông có 16 (4×4) viên sỏi. Đây là biểu diễn bằng hình tính chất sau: trong chuỗi các số tự nhiên lẻ 1, 3, 5, 7, 9,..., tổng của một số bất kỳ các thành viên liên tiếp của chuỗi đó (bắt đầu từ 1) luôn cho kết quả là một số chính phương. Chẳng hạn, $1 = 1^2$; $1 + 3 = 4 = 2^2$; $1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$; $1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$; $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5^2$;.... Những người theo Pythagoras coi mối quan hệ mật thiết giữa *gnomon* và hình vuông mà nó "ôm" như là một biểu tượng của tri thức nói chung, trong đó điều đang biết "ôm" lấy điều đã biết. Như vậy, các con số không chỉ bị giới hạn trong việc mô tả thế giới tự nhiên mà còn có thể được coi là gốc rễ của các quá trình tinh thần và tình cảm nữa.

Các con số chính phương gắn với các *gnomon* còn có thể được coi như là tiền thân của *định lý Pythagoras* nổi tiếng. Định lý toán học lừng danh này là đúng với mọi tam giác vuông (hình 3), diện tích hình vuông dựng trên cạnh huyền bằng tổng diện tích của hai hình vuông dựng trên hai cạnh góc vuông. Sự phát minh ra định lý này được "ghi lại" một cách hài hước trong cuốn truyện tranh nổi tiếng *Frank and Ernest* (hình 4). Như mô tả trong hình 2, việc thêm một số *gnomon* chính phương, $9 = 3^2$, vào một hình vuông 4×4 sẽ tạo ra hình vuông 5×5: $3^2 + 4^2 = 5^2$. Như vậy, các số 3, 4, 5 có thể biểu diễn chiều dài các cạnh của một tam giác vuông. Các số tự nhiên có tính chất này (chẳng hạn như 5, 12, 13; vì $5^2 + 12^2 = 13^2$) được gọi là các "bộ ba số Pythagoras."


Diện tích = c^2
c
b
a
Diện tích = b^2
$c^2 = a^2 + b^2$
Diện tích = a^2

Hình 3


FRANK AND ERNEST®
ĐỊNH LÝ PYTHAGORAS
ĐƯỢC GỌI THEO TÊN NHÀ TOÁN HỌC HY LẠP PYTHAGORAS. ĐỊNH LÝ NÀY PHÁT BIỂU RẰNG $A^2 + B^2 = C^2$ TRONG MỘT TAM GIÁC VUÔNG A, B LÀ CHIỀU DÀI HAI CẠNH GÓC VUÔNG VÀ C LÀ CHIỀU DÀI CẠNH HUYỀN, TỨC CẠNH ĐỐI DIỆN VỚI GÓC VUÔNG.
NGÀI CÓ THỂ ĐÚNG, PYTHAGORAS Ạ... NHƯNG MỌI NGƯỜI SẼ CƯỜI NẾU NHƯ NGÀI GỌI ĐÓ LÀ "CẠNH HUYỀN"!
www.comics.com
E-mail:mail@frankandernest.com ©2006 Thaves / dist. by NEA, Inc.

Hình 4

Rất ít các định lý toán học được hưởng "sự thừa nhận tên tuổi" như định lý Pythagoras. Vào năm 1971, khi nước Cộng hòa Nicaragua đã lựa chọn "10 phương trình toán học đã làm thay đổi diện mạo của Trái Đất" như là chủ đề của một bộ tem, định lý Pythagoras đã xuất hiện trên con tem thứ hai (hình 5; còn con tem thứ nhất vẽ "1 + 1 = 2").

Vậy Pythagoras có phải thực sự là người đầu tiên phát biểu định lý nổi tiếng được cho là của ông hay không? Một vài nhà sử học Hy Lạp đầu tiên đã nghĩ chắc chắn là như vậy. Trong một bình luận về cuốn *Cơ sở* - một chuyên luận đồ sộ về hình học và lý thuyết số được viết bởi Euclid (325-265 trước CN) - nhà triết học Hy Lạp Proclus (411-85 sau CN) đã viết: "Nếu chúng ta lắng nghe những người muốn tường thuật chi tiết về lịch sử cổ đại, chúng ta có thể tìm thấy một số người cho rằng định lý đó là của

Hình 5

Pythagoras, và rằng ông đã hiến tế một con bò đực để tôn vinh khám phá này". Tuy nhiên, bộ ba số Pythagoras đã được phát hiện thấy trên tấm khắc hình nêm của người Babylon được gọi là tấm Plimton 322, thuộc triều đại Hammurabi (1900-1600 trước CN). Hơn nữa, các phép dựng hình dựa trên định lý Pythagoras cũng đã được tìm thấy ở Ấn Độ, có liên quan đến việc xây dựng các án thờ. Các phép dựng hình này được biết chắc chắn là thuộc tác giả của Satapatha Brahmana (sách chú giải về bản chép kinh sách của người Ấn cổ), có thể đã được viết ít nhất vào khoảng vài trăm năm trước Pythagoras. Nhưng dù cho Pythagoras có phải là người nghĩ ra định lý này hay không, thì có một điều chắc chắn là các mối liên hệ lặp đi lặp lại được phát hiện thấy giữa các con số, các hình và vũ trụ đã đưa những người theo Pythagoras một bước tới gần hơn một siêu hình học chi tiết về trật tự.

Một ý tưởng khác đóng vai trò trung tâm trong thế giới Pythagoras là về các *đối nghịch vũ trụ*. Vì hình mẫu những đối nghịch là nguyên lý nền tảng của truyền thống khoa học thuở sơ khai của người Ionia (người Hy Lạp ở Attica thế kỷ 10 trước CN - ND), nên thật là tự nhiên khi những người ủng hộ Pythagoras vốn bị ám ảnh bởi trật tự cũng thừa nhận nó. Trên thực tế, Aristotle đã cho ta biết rằng ngay cả một bác sỹ tên là Alcmaeon, sống ở Croton cùng lúc với Pythagoras lập ra trường phái nổi tiếng của mình ở đó, cũng tán đồng với quan điểm cho rằng tất cả mọi thứ đều cân bằng theo cặp. Cặp đối nghịch cơ bản là *giới hạn*, biểu thị bởi các số lẻ, và *không giới hạn*, biểu thị bởi các số chẵn. Giới hạn đưa trật tự và hài hòa vào thế giới hoang dã và hỗn loạn của không giới hạn. Cả sự phức hợp của vũ trụ ở quy mô lớn lẫn sự phức tạp của cuộc sống con người ở quy mô nhỏ đều được cho là hàm chứa và bị điều khiển bởi một chuỗi những cặp đối nghịch, mà bằng cách này hay cách khác lại tương thích với nhau. Hệ thế giới đen-và-trắng này được tóm tắt thành một "bảng các đối nghịch" trong cuốn *Siêu hình học* của Aristotle:

Giới hạn	Không giới hạn
Lẻ	Chẵn
Một	Nhiều
Phải	Trái
Đực	Cái
Dừng	Chuyển động
Thẳng	Cong
Ánh sáng	Bóng tối
Thiện	Ác
Vuông	Chữ nhật

Triết học cơ bản biểu thị bởi bảng các đối nghịch không chỉ có ở người Hy Lạp cổ. Thuyết âm dương của người Trung Hoa, trong đó âm biểu thị cho tiêu cực và bóng tối, còn dương là yếu tố tươi sáng, cũng vẽ nên cùng một bức tranh đó. Những quan điểm không quá khác biệt cũng đã được đưa vào đạo Cơ đốc, thông qua khái niệm về thiên đường và địa ngục (và thậm chí vào cả những tuyên bố của Tổng thống Mỹ đại loại như "hoặc là bạn đứng về phía chúng tôi, hoặc là bạn về phe khủng bố"). Khái quát hơn, điều luôn luôn đúng là ý nghĩa của cuộc sống lại được soi rọi bởi cái chết, và ý nghĩa của tri thức lại được thấy rõ khi so sánh với sự ngu dốt.

Không phải tất cả các bài học của Pythagoras đều liên quan trực tiếp đến các con số. Phong cách sống của cộng đồng Pythagoras gắn bó chặt chẽ cũng dựa vào chủ nghĩa ăn chay, một niềm tin mạnh mẽ vào thuyết luân hồi - sự bất tử và hóa kiếp của linh hồn - và sự cấm đoán có phần bí ẩn về chuyện ăn đậu hạt. Người ta đã đưa ra một vài cách lý giải về chuyện cấm ăn đậu hạt này. Từ chuyện liên hệ đậu hạt với bộ phận sinh dục đến chuyện so sánh việc ăn đậu hạt giống như ăn một linh hồn sống. Cách lý giải sau có liên quan đến việc khi ăn đậu hạt thường trung tiện, như là một bằng chứng của một hơi thở đã bị dập tắt. Cuốn *Triết học cho người đần độn* đã tóm tắt học thuyết của Pythagoras như sau: "Mọi thứ đều được tạo bởi các con số, nên đừng có ăn các hạt đậu vì chúng sẽ sinh ra trong bạn một con số đấy".

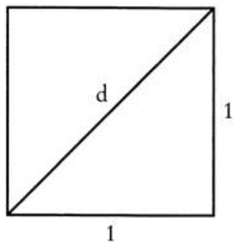
Câu chuyện được lưu truyền lâu đời nhất về Pythagoras có liên quan đến niềm tin vào sự đầu thai của linh hồn vào các sinh linh khác. Câu chuyện khá nên thơ này có nguồn gốc từ nhà thơ Xenophanes xứ Colophon vào thế kỷ thứ 6 trước công nguyên: "Họ kể rằng có lần ông ấy [Pythagoras] đi ngang qua một con chó đang bị đánh và thấy tội nghiệp nó nên nói, "Nào, dừng lại đi, và đừng đánh nó nữa; vì đó là linh hồn của một người bạn đấy. Tôi biết điều đó vì tôi nghe được nó nói mà".

Những dấu ấn không thể nhầm lẫn được của Pythagoras có thể được tìm thấy không chỉ trong những bài giảng của các nhà triết học Hy Lạp, nối nghiệp ngay sau ông, mà còn trong hầu hết các chương trình giảng dạy của các trường đại học thời trung cổ. Bảy môn học được dạy trong các trường đại học này được chia thành *tam khoa,* gồm có phép biện chứng, ngữ pháp và tu từ, và *tứ khoa*, gồm các chủ đề ưa thích của trường phái Pythagoras -

đó là hình học, số học, thiên văn học và âm nhạc. "Sự hài hòa của các thiên cầu" - thứ âm nhạc được cho là biểu diễn bởi các hành tinh trên quỹ đạo của chúng, mà theo các môn đệ của ông, thì chỉ Pythagoras mới có thể nghe thấy - đã gợi cảm hứng cho cho các nhà thơ cũng như các nhà khoa học. Nhà thiên văn học nổi tiếng Johannes Kepler (1571-1630), người đã khám phá ra các quy luật về chuyển động của các hành tinh, đã chọn nhan đề *Harmonice Mundi* (*Sự hài hòa của Thế giới*) cho một trong những tác phẩm có tầm ảnh hưởng lớn nhất của ông. Theo tinh thần Pythagoras, ông thậm chí còn phát triển những "giai điệu" nhỏ cho các hành tinh khác nhau (như nhà soạn nhạc Gustav Holst đã làm sau ông ba thế kỷ).

Xét từ khía cạnh các phương trình, là tiêu điểm của cuốn sách này, thì một khi chúng ta cởi bỏ lớp áo bí ẩn của triết học Pythagoras ra thì bộ khung còn lại bên trong chỉ là một tuyên bố hùng hồn về toán học, bản chất của nó và mối liên hệ của nó với cả thế giới vật chất lẫn tinh thần của con người. Pythagoras và các môn đệ của ông chính là cha đẻ của những tìm kiếm trật tự của vũ trụ. Họ có thể được xem là những người sáng lập ra toán học thuần túy, trong đó, không giống như các bậc tiền bối của họ - là những người Babylon và Ai Cập - họ tham dự vào toán học như là một lĩnh vực trừu tượng, tách biệt hẳn với mọi mục đích thực tế. Câu hỏi liệu những người theo trường phái Pythagoras có cũng xác lập toán học là công cụ cho khoa học hay không là một câu hỏi tinh tế hơn. Trong khi những người theo trường phái Pythagoras nhất định gắn mọi hiện tượng với các con số, thì bản thân các con số - chứ không phải các hiện tượng hay nguyên nhân gây ra chúng - đã trở thành tiêu điểm nghiên cứu. Đây không phải là một hướng đi đặc biệt màu mỡ cho nghiên cứu khoa học. Nhưng, điều cơ bản đối với học thuyết Pythagoras là niềm tin tuyệt đối vào sự tồn tại của các quy luật tự nhiên, tổng quát. Niềm tin này, đã trở thành trụ cột của khoa học hiện đại, có thể đã bắt nguồn từ khái niệm Định mệnh trong tấn bi kịch Hy Lạp. Vào cuối thời kỳ Phục Hưng, niềm tin mạnh mẽ vào tính hiện thực của một nhóm các định luật có thể giải thích được mọi hiện tượng, vẫn tiếp tục tiến bộ khá xa trước khi có một bằng chứng cụ thể nào, và chỉ Galileo, Descartes, và Newton mới biến nó thành một định đề có thể biện minh dựa trên cơ sở quy nạp.

Một đóng góp chủ yếu khác của những người theo trường phái Pythagoras, đó là sự phát hiện một cách tỉnh táo rằng "tôn giáo số" của riêng họ, trên thực tế, thật đáng tiếc là không vận hành được. Các số nguyên 1, 2, 3,... là không đủ ngay cả để xây dựng toán học, chứ chưa nói gì đến việc mô tả vũ trụ. Hãy xét hình vuông ở hình 6, trong đó độ dài của một cạnh là 1 đơn vị và độ dài đường chéo biểu thị bằng d. Chúng ta có thể dễ dàng tính được độ dài của đường chéo này bằng cách sử dụng định lý Pythagoras đối với một trong hai tam giác vuông do đường chéo đó chia đôi hình vuông. Theo định lý này thì bình phương đường chéo (cạnh huyền) bằng tổng bình phương hai cạnh: $d^2 = 1^2+1^2 = 2$. Một khi bạn đã biết bình phương của một số dương thì bạn có thể tính ra số đó bằng cách lấy căn bậc 2 (ví dụ như nếu $x^2 = 9$ thì $x = \sqrt{9} = 3$). Như vậy, $d^2 = 2$ tức là $d=\sqrt{2}$ đơn vị. Vậy tỷ số giữa độ dài của đường chéo với độ dài của cạnh hình vuông là $\sqrt{2}$. Tuy nhiên, ở đây đã xuất hiện một cú sốc thực sự - một phát hiện đã đánh



Hình 6

để triết học số rời rạc của trường phái Pythagoras vốn được xây dựng một cách rất tỷ mỉ. Một trong những người theo trường phái Pythagoras (có thể là Hippasus ở Metapontum, sống vào nửa đầu thế kỷ thứ 5 trước CN) đã chứng minh được rằng căn bậc hai của 2 không thể được biểu thị như là một tỷ số của hai số nguyên nào. Hay nói cách khác, ngay cả khi chúng ta có vô hạn các số nguyên để lựa chọn thì việc tìm ra hai số nguyên có tỷ số bằng $\sqrt{2}$ cũng thất bại ngay từ đầu. Các con số có thể được biểu thị bằng tỷ số của hai số nguyên (như 3/17, 2/5, 1/10, 6/1) đều được gọi là các *số hữu tỷ*. Nhưng người kế tục Pythagoras đã chứng minh được rằng $\sqrt{2}$ không phải là một số hữu tỷ. Trên thực tế, thì ngay sau phát hiện đầu tiên này, người ta thấy rằng cả $\sqrt{3}$, $\sqrt{17}$ hay căn bậc hai của một số bất kỳ không phải là các số chính phương (như 16 hay 25) cũng đều như vậy. Kết quả thật là ấn tượng - những người theo trường phái Pythagoras đã chứng tỏ được rằng ngoài vô hạn các số hữu tỷ ra, chúng ta buộc phải bổ sung thêm vô hạn các số mới - mà ngày nay chúng ta gọi là *số vô tỷ*. Khỏi phải nói về tầm quan trọng của khám phá này đối với sự phát triển tiếp sau của giải tích toán. Ngoài những thứ khác ra, phát hiện này đã dẫn đến việc thừa nhận sự tồn tại của vô hạn các số "đếm được" và "không đếm được" vào thế kỷ 19. Tuy nhiên, những người theo trường phái Pythagoras đã bị choáng váng bởi cuộc khủng hoảng về triết học này tới mức triết gia Iamblichus đã tuyên bố rằng người đã khám phá ra số vô tỷ và hé lộ bản chất của chúng với "những kẻ không xứng đáng được chia sẻ lý thuyết này" là "đáng căm ghét tới mức không chỉ bị loại khỏi cộng đồng [của những người theo trường phái Pythagoras] và cuộc sống mà thậm chí còn dựng cho y một tâm bia mộ với lý do người đồng đội trước đây [của họ] đã bị loại khỏi cuộc sống giữa loài người".

Có lẽ thậm chí còn quan trọng hơn cả sự khám phá ra số vô tỷ là sự kiên định của các học trò tiên phong của Pythagoras về chứng minh toán học - một quá trình hoàn toàn dựa trên lập luận lôgic, theo đó xuất phát từ một số định đề, sự hợp thức của bất kỳ mệnh đề toán học nào cũng phải được xác lập một cách rõ ràng. Trước người Hy Lạp thì ngay cả các nhà toán học cũng không chờ đợi có một ai đó ít nhất cũng quan tâm đến những vật lộn trí óc dẫn họ tới một khám phá cụ thể nào đó. Nếu một công thức toán học vận dụng được trong thực tế - chẳng hạn như để phân chia các thửa đất - thì như vậy đã đủ là chứng minh rồi. Trái lại, người Hy Lạp còn muốn lý giải tại sao nó lại có thể làm được như vậy. Trong khi khái niệm chứng minh có lẽ lần đầu tiên được đưa ra bởi nhà triết học Thales ở Miletus (khoảng 625-547 trước CN), thì những môn đồ của Pythagoras lại chính là người đã biến thực tiễn đó trở thành một công cụ hoàn hảo để xác định các chân lý toán học. Tầm quan trọng của bước đột phá về lôgic này là vô cùng to lớn. Những chứng minh xuất phát từ các định đề ngay lập tức đã đặt toán học trên một nền tảng vững chắc hơn bất kỳ một lĩnh vực nào khác được các nhà triết học luận bàn thời đó. Một khi, một chứng minh chặt chẽ dựa trên các bước suy luận không có một sơ hở nào được công bố thì giá trị của phát biểu toán học có liên quan, về cơ bản, là không thể chối bỏ được. Ngay cả Arthur Conan Doyle, người đã tạo ra một thám tử lừng danh nhất thế giới, cũng đã nhận ra vị trí đặc biệt của chứng minh toán học. Trong tập truyện *Chiếc nhẫn tình cờ*, Sherlock Homes đã tuyên bố rằng kết luận của ông là "không thể sai lầm như nhiều mệnh đề của Euclid".

Về câu hỏi liệu toán học được khám phá ra hay phát minh ra, thì Pythagoras và các môn đệ của ông đều không hề hồ nghi - toán học là thực, không thể thay đổi được, nó có mặt ở khắp mọi nơi và siêu phàm hơn bất kỳ điều gì có thể hiểu được đột sinh trong trí tuệ mong manh của con người. Những người thuộc trường phái Pythagoras đúng là đã nhúng cả vũ trụ vào toán học. Trên thực tế, đối với những người thuộc trường phái Pythagoras thì Thượng đế không phải là một nhà toán học mà *toán học chính là Thượng đế*.

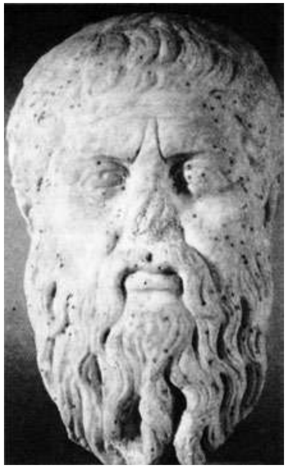
Tầm quan trọng của triết học Pythagoras không chỉ nằm ở giá trị nội tại thực sự của nó. Bằng việc dựng nên một sân khấu, và trong một chừng mực nào đó cả chương trình nữa, cho thế hệ các nhà triết học tiếp sau - đặc biệt là Plato - các môn đồ của Pythagoras đã xác lập được một vị trí thống trị trong tư tưởng của phương Tây.

Vào hang của Plato

Nhà toán học và triết học nổi tiếng người Anh Alfred North Whitehead (1861-1947) đã từng nhận xét rằng "sự khái quát hóa an toàn nhất có thể thực hiện về lịch sử triết học phương Tây là toàn bộ những chú giải của Plato”.

Thực sự thì Plato (khoảng 428-347 trước CN) là người đầu tiên đã tập hợp các chủ đề rải rác từ toán học, khoa học, và ngôn ngữ đến tôn giáo, đạo đức và nghệ thuật lại và xử lý chúng một cách thống nhất, và điều này, về cơ bản, đã xác định triết học như là một môn học. Đối với Plato, triết học không phải là một môn học trừu tượng nào đó, tách biệt khỏi những hoạt động hàng ngày, mà là người hướng dẫn chủ chốt con người ta biết sống cuộc đời của mình như thế nào, biết nhận ra chân lý và vận hành hệ thống chính trị của mình. Đặc biệt, ông tuyên bố rằng triết học có thể giúp chúng ta tiếp cận lãnh địa của chân lý vốn ở quá xa những gì mà chúng ta có thể cảm nhận được một cách trực tiếp nhờ các giác quan của mình hay thậm chí suy luận theo lẽ phải thông thường đơn giản. Vậy ai sẽ là người tìm kiếm không ngừng nghỉ những tri thức thuần túy, những chân lý vĩnh cửu và cái thiện tuyệt đối?

Plato, con trai của Ariston và Perictione, được sinh ra tại Athens hoặc Aegina. Hình 7 là bức tượng đá La Mã của Plato, rất có thể đã được sao lại từ bản gốc trước kia của người Hy Lạp ở thế kỷ thứ 4 trước CN. Gia đình ông có dòng dõi xuất chúng ở cả hai bên nội ngoại, gồm có những nhân vật như Solon, một nhà làm luật danh tiếng, và Codrus, vị vua cuối cùng của Athens. Chú của Plato là Charmides và người em họ của mẹ ông là Critias đều là bạn của triết gia nổi tiếng Socrate (khoảng 470-399 trước CN) - một mối quan hệ, mà trên nhiều phương diện, đã có ảnh hưởng quan trọng và lâu dài đến sự phát triển trí tuệ của Plato. Ban đầu, Plato dự định tham chính, nhưng một loạt những hành vi bạo lực bởi các



Hình 7

phe phái chính trị lôi cuốn ông một thời đã khiến ông nhận thức lại. Sau này, chính những thúc đẩy ban đầu bởi chính trị này có lẽ đã khuyến khích Plato vạch ra những cái mà ông cho là thiết yếu phải giáo dục cho những người bảo vệ tương lai của đất nước. Trong một trường hợp, ông thậm chí còn định (nhưng không thành công) giảng cho Dionysius II, người cai trị Syracuse.

Sau khi Socrates bị hành hình vào năm 399 trước CN, Plato đã dấn thân vào một chuyến du hành dài và chỉ kết thúc khi ông sáng lập ra trường học về triết học và khoa học nổi tiếng của mình - mang tên Viện hàn lâm (*Academy*) - vào khoảng năm 387 trước CN. Plato làm giám đốc (hay hiệu trưởng -*scholarch* - theo tiếng Hy Lạp) của Viện cho đến khi ông qua đời và người cháu của ông là Speusippus lên thay. Không giống như các Viện hàn lâm ngày nay, Viện hàn lâm này là một tập hợp không chính thức của các trí thức, những người theo đuổi những sở thích rất rộng và phong phú, dưới sự lãnh đạo của Plato. Không phải nộp học phí, không có chương trình giảng dạy bắt buộc và thậm chí còn không có cả các giảng viên chính thức. Tuy nhiên, trường lại có "yêu cầu đầu vào" khá khác thường. Theo một bài diễn văn đọc trước công chúng vào thế kỷ thứ 4 sau CN của hoàng đế Julian the Apostate, thì trước cửa Viện của Plato có treo tấm biển khá nặng. Trên tấm biển này có khắc một dòng chữ không được nói rõ trong bài diễn văn, song người ta lại tìm thấy nó trong một bản ghi chép khác ở thế kỷ thứ 4. Đó là dòng chữ: "Những người không biết hình học không được bước chân vào". Vì khoảng cách thời gian giữa lúc Viện được thành lập và bản ghi chép đầu tiên về câu khắc đó không dưới 8 thế kỷ nên chúng ta hoàn toàn không thể biết chắc chắn có thực sự tồn tại một câu khắc như thế hay không. Tuy nhiên, quan điểm được biểu thị bởi yêu cầu trong câu khắc đó đã phản ánh đúng quan điểm cá nhân của Plato, đó là một điều hoàn toàn không thể nghi ngờ. Ở một trong những tác phẩm đối thoại nổi tiếng của mình, *Gorgias,* Plato đã viết: "Sự cân bằng về hình học có tầm quan trọng rất to lớn giữa các thần và con người".

"Sinh viên" trong Viện nhìn chung là tự học và một vài người trong số họ - điển hình là Aristotle vĩ đại - đã ở đó đến 20 năm. Plato xem sự tiếp xúc trong một thời gian dài giữa những trí tuệ sáng tạo như là một phương tiện tốt nhất cho việc sản sinh ra những ý tưởng mới, với các chủ đề từ siêu hình học và toán học trừu tượng cho đến đạo đức và chính trị. Những tính cách thuần khiết và gần như thánh thiện của các học trò của Plato đã được khắc họa rất đẹp trong bức tranh có tên là *Trường học của Plato* của một họa sỹ tượng trưng người Bỉ Jean Delville (1867-1953). Để nhấn mạnh phẩm chất tinh thần của các học sinh này, Delville đã vẽ họ trong trạng thái khỏa thân, và họ có vẻ như lưỡng tính, vì điều đó được cho là trạng thái nguyên thủy của con người.

Tôi đã thất vọng khi biết rằng các nhà khảo cổ học đã không thể tìm thấy di tích nào của Viện hàn lâm của Plato. Trong một chuyến đi Hy Lạp vào hè năm 2007, tôi đã tìm kiếm thứ tuyệt vời thứ hai. Plato đã từng nhắc tới Cổng vòm của Zeus (một lối đi bộ có mái che được xây dựng vào thế kỷ thứ 5 trước CN) như là một nơi ưa thích để trò chuyện với bạn bè. Tôi đã tìm thấy đống đổ nát của cái cổng vòm này ở góc phía tây bắc của khu chợ cổ ở Athens (đây là trung tâm đô thị vào thời Plato; hình 8). Tôi phải nói rằng mặc dù nhiệt độ hôm đó lên tới 46 độ C, tôi vẫn cảm thấy gai người khi đi bộ trên cùng một con đường mà chắc có lẽ người đàn ông vĩ đại ấy đã từng bước qua hàng trăm, nếu không muốn nói là hàng ngàn lần.

Hình 8

Dòng chữ huyền thoại treo trên cửa Viện hàn lâm đã biểu thị một cách hùng hồn thái độ của Plato đối với toán học. Trên thực tế, hầu hết những nghiên cứu toán học quan trọng vào thế kỷ 4 trước CN được thực hiện bởi những người bằng cách này hay cách khác đều có liên quan tới Viện của Plato. Nhưng bản thân Plato lại không phải là một nhà toán học tài tình về mặt kỹ thuật. Những đóng góp trực tiếp của ông đối với tri thức toán học có lẽ là rất tối thiểu. Song ông lại là người theo dõi rất nhiệt tình, một nguồn thách thức luôn thôi thúc, một nhà phê bình thông minh và một người lãnh đạo truyền cảm. Nhà triết học và sử học ở thế kỷ thứ nhất Philodemus đã vẽ nên một bức tranh thật rõ ràng: "Vào thời đó, người ta chứng kiến một sự tiến bộ vĩ đại trong toán học, với sự đóng góp của Plato như là một kiến trúc sư tổng thể, đặt ra vấn đề và các nhà toán học miệt mài nghiên cứu chúng". Nhà triết học và toán học Proclus thuộc trường phái Tân Plato (trường phái triết học phát triển ở Alexandria thế kỷ thứ 3 sau CN) bổ sung: "Plato... đã thúc đẩy mạnh mẽ sự tiến bộ của toán học nói chung và hình học nói riêng bởi nhiệt huyết của ông đối với những nghiên cứu này. Ai cũng biết rằng trong những tác phẩm của ông rải đầy những thuật ngữ toán học và ở đâu ông cũng khơi dậy niềm đam mê đối với toán học trong các học trò triết học". Nói cách khác, Plato, người mà tri thức toán học luôn được cập nhật một cách bao quát, có thể trò chuyện với các nhà toán học một cách ngang phân, người đặt ra vấn đề, mặc dù những thành tựu về toán học của cá nhân ông lại không đáng kể.

Một minh chứng ấn tượng khác về sự đánh giá của Plato đối với toán học đến từ cuốn sách có lẽ là hoàn thiện nhất của ông, cuốn *Nền cộng hòa*, một tập hợp dị thường về mỹ học, đạo đức, siêu hình học, và chính trị. Ở đó, trong cuốn VII, Plato (thông qua nhân vật trung tâm là Socrates) đã vạch ra một kế hoạch giáo dục đầy tham vọng được thiết kế nhằm đào tạo ra những nhà lãnh đạo đất nước không tưởng. Chương trình giảng dạy nghiêm khắc dù là có tính lý tưởng hóa này dự tính là sẽ đào tạo ngay từ khi còn là trẻ thơ được truyền đạt thông qua trò chơi, du lịch và thể thao. Sau khi lựa chọn những người tỏ ra có hứa hẹn, chương trình sẽ tiếp tục trong khoảng thời gian không dưới 10 năm với toán học, 5 năm học phép biện chứng, và 15 năm rèn luyện thực tế, bao gồm cả việc thực hiện mệnh lệnh trong thời gian chiến tranh và các nhiệm vụ khác "phù hợp với tuổi trẻ". Plato còn giải thích rõ ràng tại sao ông lại nghĩ đó là sự đào tạo cần thiết cho các chính trị gia tương lai:

> Như vậy, quyền lực chỉ được trao cho những người không đam mê quyền lực, bằng không, các đối thủ của họ sẽ lập tức khiêu chiến ngay... Song, vậy thì chúng ta phải yêu cầu ai đảm nhiệm việc chăm lo cho một thành phố đây, nếu như không phải là những người sành sỏi và biết cách làm thế nào để điều hành nó một cách tốt nhất, những người từng biết đến những vinh quang khác, từng trải nghiệm một cuộc sống khác hơn cuộc sống của một quan chức nhà nước.

Thật là mới mẻ, phải không? Trên thực tế, trong khi một chương trình đòi hỏi cao như vậy là phi thực tế ngay cả ở thời Plato, nhưng George Washington lại nhất trí rằng một học vấn về toán học và triết học không phải là một ý tưởng tồi đối với các nhà chính trị tương lai:

> Khoa học về các hình, ở một mức độ nhất định, không chỉ là tuyệt đối cần thiết trong mỗi bước đi của đời sống văn minh mà việc nghiên cứu các chân lý toán học còn tập cho trí não làm quen với phương pháp và sự đúng đắn trong lập luận, và là một việc làm đặc biệt xứng đáng với con người có lý trí. Trong trạng thái tồn tại còn mờ mịt, với rất nhiều thứ dường như không ổn định đối với việc nghiên cứu còn lúng túng, thì đây chính là nền tảng, là chỗ dựa của những khả năng lý trí. Từ nền tảng cao của những chứng minh toán học và triết học, chúng ta đã vô tình được dẫn tới những tư biện cao quý hơn và những suy tư siêu phàm hơn rất nhiều.

Đối với câu hỏi về bản chất của toán học, thì việc Plato là nhà triết học của toán học thậm chí còn quan trọng hơn cả việc Plato là nhà toán học hay là người thúc đẩy toán học. Những ý tưởng tiên phong đã đặt ông ở vị thế không chỉ cao hơn tất cả các nhà toán học và triết học ở thế hệ ông, mà còn xác định ông là một nhân vật có ảnh hưởng đến hàng thiên niên kỷ tiếp sau.

Quan điểm của Plato về toán học thực sự gợi đến câu chuyện ngụ ngôn về cái hang rất nổi tiếng của ông. Trong đó ông đã nhấn mạnh giá trị đáng ngờ của những thông tin có được từ những giác quan của con người. Những gì chúng ta cảm nhận là thế giới thực, Plato nói, cũng chẳng thực hơn những cái bóng được chiếu lên thành hang. Dưới đây là một đoạn đáng chú ý trong cuốn *Nền cộng hòa*.

> Hãy tưởng tượng những con người sống trong một địa đạo ngầm dưới đất giống như một cái hang, có một lối vào, rất dài, và rộng mở cho ánh sáng tràn vào khắp khoảng rộng của hang. Họ sống ở đó từ lúc nhỏ đến lớn với đôi chân và cổ bị cùm chặt khiến cho họ chỉ có thể nhìn về phía trước, và không thể ngoái đầu qua lại được. Ánh sáng đến với họ từ ngọn lửa đốt ở xa bên trên và ở phía sau họ. Giữa ngọn lửa và các tù nhân có một lối đi và bạn hãy tưởng tượng dọc theo lối đi đó có một bức tường thấp giống như tấm vách chắn ngăn cách người điều khiển các con rối và khán giả, và trên đó người ta trình diễn các con rối... Và bây giờ bạn hãy tưởng tượng người ta giơ cao dọc theo bức tường này các đồ vật, tượng người và các sinh vật khác làm bằng gỗ, đá và các loại vật liệu khác... Liệu bạn có tin rằng những tù nhân này, tự mình hoặc nhờ nhau, có thể nhìn thấy cái gì khác ngoài những cái bóng do ánh lửa ở phía sau họ chiếu lên vách hang đối diện?

Theo Plato, chúng ta, con người nói chung, không khác gì những tù nhân ở trong hang đó, những người cứ tưởng những cái bóng là thực. (Hình 9 là một bức tranh khắc của Jan Saenredam vẽ năm 1604 minh họa cho câu chuyện ngụ ngôn trên). Đặc biệt, Plato nhấn mạnh, các chân lý toán học không nhắm vào các đường tròn, tam giác và hình vuông có thể được vẽ trên giấy cói, hoặc vạch bằng một chiếc que trên cát, mà là những đối tượng trừu tượng sống trong một thế giới lý tưởng, là ngôi nhà của các hình dạng thực và hoàn hảo. Thế giới Platonic của các dạng toán học này khác biệt với thế giới vật chất, và chính trong thế giới đầu tiên này, các mệnh

Hình 9

đề toán học, như định lý Pythagoras, là đúng. Tam giác vuông mà chúng ta vẽ trên giấy cũng chỉ là một bản sao không hoàn hảo - một bản sao gần đúng - của một tam giác thực, trừu tượng.

Một vấn đề cơ bản khác mà Plato đã nghiên cứu chi tiết có liên quan đến bản chất của chứng minh toán học như là một quá trình dựa trên các *định đề và tiên đề*. Các tiên đề là những điều khẳng định cơ bản mà sự đúng đắn của chúng được coi là hiển nhiên, không cần phải chứng minh. Chẳng hạn, tiên đề đầu tiên trong hình học Euclid là "giữa hai điểm bất kỳ có thể vẽ được một đường thẳng". Trong cuốn *Nền cộng hòa*, Plato đã kết hợp một cách đẹp đẽ khái niệm các định đề với ý niệm của ông về thế giới của các dạng toán học:

> Tôi nghĩ là các bạn biết rằng những người bận tâm với hình học và tính toán cùng những thứ tương tự, thường cho các [số] chẵn và lẻ, các hình, ba loại góc, và những thứ khác tương tự đều là hiển nhiên; khi giả sử những điều này đều đã biết, họ sẽ lấy chúng làm các giả thiết và từ đó họ không cảm thấy cần phải đưa ra bất kỳ giải thích nào liên quan đến chúng, dù là với chính họ hay bất kỳ ai khác; dựa trên chính những giả thiết này, họ ngay lập tức tiếp tục thực hiện phần còn lại của lập luận cho đến khi họ đạt đến, với sự tán thành chung, một kết luận cụ thể mà họ nhắm đến. Hơn nữa, bạn cũng biết rằng họ sử dụng các hình nhìn thấy được và tranh luận về chúng, như khi làm như vậy họ không nghĩ về các hình này mà là về những thứ mà chúng biểu diễn; vì vậy, hình vuông tuyệt đối và đường kính tuyệt đối mới là đối tượng lập luận của họ, chứ không phải là cái đường kính mà họ vẽ... mục đích của người nghiên cứu là nhìn cái đối ứng tuyệt đối của nó mà ta *chỉ có thể nhìn thấy được bằng ý nghĩ* [tác giả nhấn mạnh].

Các quan điểm của Plato với tư cách là học thuyết Plato đã tạo nên cơ sở cho những điều đã trở nên quen thuộc trong triết học nói chung và trong những thảo luận về bản chất của toán học nói riêng. Học thuyết Plato theo nghĩa rộng nhất của nó là ủng hộ niềm tin vào những thực tại trừu tượng, vĩnh cửu, không thể thay đổi, hoàn toàn độc lập với thế giới nhất thời mà chúng ta cảm nhận được bằng các giác quan của mình. Theo học thuyết Plato, sự tồn tại thực của các đối tượng toán học cũng là một thực tế khách quan như sự tồn tại của chính bản thân vũ trụ vậy. Không chỉ là các số tự nhiên, các đường tròn, hình vuông tồn tại mà cả các số ảo, các hàm số, các hình fractal, các hình học phi Euclid, và các tập hợp vô hạn cũng như rất nhiều các định lý khác nhau về những thực thể đó. Nói gọn lại thì mỗi một khái niệm toán học hay một mệnh đề "đúng đắn một cách khách quan" (sẽ được định nghĩa sau) đã được phát biểu hoặc tưởng tượng ra, và cả một số vô hạn các khái niệm và mệnh đề vẫn còn chưa được phát hiện, chúng đều là những thực thể tuyệt đối, hoặc *phổ quát*, không thể tạo ra hay hủy bỏ được. Chúng tồn tại độc lập với chuyện chúng ta có hiểu biết về chúng hay không. Khỏi cần phải nói rằng các đối tượng này không phải là vật chất - chúng sống trong một thế giới tự lập của những thực thể phi thời gian. Học thuyết Plato xem các nhà toán học như là những nhà thám hiểm của những vùng đất lạ; họ chỉ có thể khám phá ra các chân lý toán học chứ không phát minh ra chúng. Giống như là châu Mỹ vẫn luôn ở đó trước khi Columbus (hay Leif Ericson) khám phá ra nó, các định lý toán học cũng tồn tại trong thế giới Platonic trước khi những người Babylon có những nghiên cứu đầu tiên về toán học. Đối với Plato, chỉ những dạng và những ý tưởng trừu tượng của toán học mới thực sự và trọn vẹn tồn tại, vì, như ông khẳng định, chỉ trong toán học, chúng ta mới có thể có được những tri thức tuyệt đối chính xác và khách quan. Chính vì vậy, trong tâm trí của Plato, toán học trở nên gắn bó gần gũi với thần thánh. Trong tác phẩm đối thoại *Timaeus*, đấng sáng tạo đã sử dụng toán học để nhào nặn nên thế giới, và trong cuốn *Nền cộng hòa*, tri thức về toán học được xem như là một bước cốt yếu trên con đường tiến tới sự hiểu biết về những dạng thần thánh. Plato không sử dụng toán học để phát biểu một số định luật của tự nhiên mà ta có thể kiểm chứng được bằng thực nghiệm. Đúng hơn, đối với ông, đặc tính toán học của thế giới đơn giản chỉ là một hệ quả của thực tế là "Thượng đế luôn hình học hóa".

Plato mở rộng ý niệm của mình về "các dạng thực" sang cả những lĩnh vực khác, đặc biệt là đối với thiên văn học. Ông luận giải rằng trong thiên văn học thực "chúng ta phải để mặc cho bầu trời" và đừng có cố gắng giải thích sự bố trí cũng như những chuyển động biểu kiến của những ngôi sao nhìn thấy được. Thay vì thế, Plato coi thiên văn học thực như là một môn khoa học nghiên cứu các quy luật chuyển động trong một thế giới toán học lý tưởng nào đó, mà đối với nó bầu trời quan sát được chỉ là một sự minh họa (cũng giống như các hình hình học được vẽ trên giấy cói cũng chỉ là để minh họa cho các hình thực).

Những đề nghị của Plato đối với việc nghiên cứu thiên văn học cũng được ngay cả một số người nhiệt thành nhất của học thuyết Plato coi là còn phải bàn cãi. Những người bảo vệ các ý kiến của ông thì cho rằng điều mà Plato thực sự muốn nói không phải là bản thân thiên văn học thực thụ phải có quan tâm tới một bầu trời lý tưởng nào đó, không liên quan gì đến bầu trời quan sát được, mà nó cần phải có quan hệ với những chuyển động thực của các thiên thể đối ngược với những chuyển động biểu kiến như được nhìn thấy từ Trái đất. Tuy nhiên, những người khác chỉ ra rằng, một sự bám theo quá sát câu châm ngôn của Plato sẽ làm cản trở sự phát triển của thiên văn học dựa vào quan sát với tư cách là một môn khoa học. Là sự diễn giải thái độ của Plato đối với thiên văn học như nó có thể, học thuyết Plato đã trở thành một trong những giáo điều hàng đầu khi nó chạm đến những nền tảng của toán học.

Nhưng thế giới Platonic của toán học liệu có thực sự tồn tại? Mà nếu có thì chính xác nó ở đâu? Và những phát biểu "đúng đắn một cách khách quan" sống trong thế giới này là những gì? Hay phải chăng các nhà toán học gia nhập trường phái Plato đơn giản chỉ là biểu thị cùng một thứ niềm tin lãng mạn mà người đời đã gán cho họa sĩ vĩ đại thời Phục Hưng Michelangelo? Theo truyền thuyết thì Michelangelo tin rằng những bức tượng tuyệt vời của ông thực sự đã tồn tại sẵn bên trong những khối đá hoa cương và nhiệm vụ của ông chỉ là làm cho chúng lộ ra mà thôi.

Những người theo học thuyết Plato hiện đại (vâng, họ vẫn thực sự tồn tại và quan điểm của họ sẽ được trình bày chi tiết hơn ở các chương sau) khăng khăng rằng thế giới Platonic của các dạng toán học là thực, và họ đã đưa ra những thứ mà họ coi như những ví dụ cụ thể về những phát biểu toán học đúng đắn một cách khách quan tồn tại trong thế giới đó.

Hãy xét mệnh đề dễ hiểu sau đây: mỗi một số nguyên chẵn lớn hơn 2 đều có thể viết thành tổng của hai số nguyên tố (là số chỉ chia hết cho 1 và chính nó). Phát biểu nghe có vẻ đơn giản này được gọi là giả thuyết Goldbach, vì một phỏng đoán tương đương xuất hiện trong một bức thư do nhà toán học nghiệp dư nước Phổ là Christian Goldbach (1690-1764) viết vào ngày 7 tháng 6 năm 1742. Bạn có thể dễ dàng kiểm tra lại tính đúng đắn của phỏng đoán này bằng một vài số chẵn đầu tiên: 4 = 2+2; 6 = 3+3; 8 = 3+5; 10 = 3+7; 12 = 5+7; 14 = 3+11 (hay 7+7); 16 = 5+11 (hay 3+13); và cứ tiếp tục như vậy. Phát biểu này đơn giản tới mức nhà toán học người Anh G. H. Hardy đã tuyên bố rằng "bất kỳ thằng ngốc nào cũng có thể phỏng đoán được như vậy". Thực tế, nhà triết học và toán học người Pháp René Descartes đã biết giả thuyết này còn trước cả Goldbach. Tuy nhiên, chứng minh giả thuyết này hóa ra lại là một vấn đề hoàn toàn khác. Năm 1966, nhà toán học người Trung Quốc Trần Cảnh Nhuận đã tiến được một bước lớn trong việc chứng minh nó. Ông đã tìm cách chứng minh rằng mọi số nguyên chẵn đủ lớn là tổng của hai số, trong đó một số là số nguyên tố còn số kia nhiều nhất là tích của hai số nguyên tố. Đến cuối năm 2005, nhà nghiên cứu Bồ Đào Nha Tomás Oliveira e Silva đã chứng minh phỏng đoán này là đúng với các số lên đến 3×10^{17} (ba trăm ngàn triệu triệu). Tuy nhiên, mặc dù có sự nỗ lực vô cùng to lớn của rất nhiều nhà toán học tài năng, song tại thời điểm viết cuốn sách này, người ta vẫn chưa có được một chứng minh tổng quát. Ngay cả sự cám dỗ của một phần thưởng trị giá 1 triệu đôla được đưa ra vào khoảng thời gian từ 20 tháng 3 năm 2000 đến 20 tháng 3 năm 2002 (nhằm quảng bá cho cuốn tiểu thuyết nhan đề *Cậu Petros và giả thuyết Goldbach*), cũng không mang lại kết quả mong đợi. Tuy nhiên ở đây, vấn đề nan giải là ý nghĩa của cụm từ “đúng đắn một cách khách quan” trong toán học. Giả sử rằng một chứng minh chặt chẽ sẽ thực sự được công bố vào năm 2016. Liệu chúng ta khi đó có thể nói rằng phát biểu này thực sự đã là đúng khi Descartes lần đầu tiên nghĩ về nó không? Hầu hết mọi người đều cho rằng câu hỏi này là ngu ngốc. Rõ ràng, nếu một mệnh đề được chứng minh là đúng thì nó vẫn *luôn luôn* đúng, ngay cả trước khi chúng ta biết là nó đúng. Hay, hãy xét một ví dụ có vẻ như ngớ ngẩn khác là *Giả thuyết Catalan*. Số 8 và số 9 là hai số nguyên liền nhau và cả đều tương đương với một số lũy thừa thuần, tức là $8 = 2^3$ và $9 = 3^2$. Vào năm 1844, nhà toán học người Bỉ Eugène Charles Catalan (1814 - 94) đã phỏng đoán rằng trong số tất cả các lũy thừa khả dĩ của các số nguyên thì chỉ có cặp duy nhất là hai số nguyên liền tiếp là 8 và 9 (trừ 0 và 1). Hay nói cách khác, bạn có thể dành cả đời mình để viết ra tất cả các số lũy thừa thuần có tồn tại. Ngoài 8 và 9 ra, bạn sẽ không tìm thấy hai số nào trong số các lũy thừa ấy khác nhau 1 đơn vị. Vào năm 1342, nhà toán học và triết học người Pháp gốc Do Thái là Levi Ben Gerson (1288-1344) đã thực sự chứng minh được một phần nhỏ của giả thuyết này - rằng 8 và 9 là những lũy thừa duy nhất của 2 và 3, hơn kém nhau 1 đơn vị. Một bước quan trọng được thực hiện bởi nhà toán học Robert Tijdeman vào năm 1976. Tuy nhiên, chứng minh tổng quát của giả thuyết Catalan đã làm bối rối những bộ óc toán học xuất chúng nhất trong suốt hơn 150 năm. Cuối cùng, vào ngày 18 tháng 4 năm 2002, nhà toán học người Rumani Preda Mihailescu đã đưa ra một chứng minh hoàn hảo cho giả thuyết này. Chứng minh của ông được công bố vào năm 2004 và giờ thì đã được chấp nhận hoàn toàn. Một lần nữa bạn có thể hỏi: Khi nào thì giả thuyết Catalan trở thành đúng đắn? Năm 1342, 1844, 1976, 2002 hay 2004? Lẽ nào còn chưa rõ ràng rằng phát biểu này là luôn luôn đúng, chỉ có điều là chúng ta không biết là nó đúng thôi? Đó là những loại chân lý mà những người theo Plato gọi là “đúng đắn một cách khách quan”.

Một số nhà toán học, triết học, khoa học nhận thức và những “khách hàng” khác của toán học (chẳng hạn, các nhà khoa học về máy tính) đã xem thế giới Platonic như là thứ hư cấu của trí tưởng tượng của những đầu óc quá mơ mộng (tôi sẽ mô tả khía cạnh này và những thứ giáo điều khác một cách chi tiết hơn ở phần sau của cuốn sách). Thực tế thì vào năm 1940, nhà sử học toán học nổi tiếng là Eric Temple Bell (1883-1960) đã đưa ra dự đoán dưới đây:

> Theo các nhà tiên tri, môn đồ cuối cùng của lý tưởng Platonic trong toán học sẽ gia nhập đội ngũ khủng long vào năm 2000 (*hàm ý tuyệt chủng -ND*). Lột bỏ tấm áo khoác hoang tưởng của chủ nghĩa vĩnh cửu, toán học sẽ trở lại bản chất như nó vốn có, một kiểu ngôn ngữ có cấu trúc nhân văn do con người tạo ra cho những mục đích xác định do chính họ đặt ra. Đền thờ cuối cùng của một chân lý tuyệt đối sẽ biến mất mà không có gì cất giữ ở bên trong nó.

Lời tiên tri của Bell đã được chứng minh là sai. Trong khi đã xuất hiện những giáo điều ngược lại hoàn toàn (nhưng đi theo những hướng khác) với học thuyết Plato, nhưng những giáo điều đó còn chưa chiếm được hoàn toàn khối óc (và cả trái tim nữa!) của tất cả các nhà toán học và triết học, những người ngày nay vẫn tiếp tục còn chia rẽ như bất cứ khi nào trước đây.

Tuy nhiên, cứ tạm giả sử rằng trường phái Platonic chiến thắng, và tất cả chúng ta đều trở thành những nhà Platonic toàn tâm. Liệu khi đó học thuyết Plato có thực sự giải thích được “tính hiệu quả đến phi lý” của toán học trong việc mô tả thế giới của chúng ta hay không? Không hẳn. Tại sao thực tại vật lý lại hành xử theo các quy luật có trong thế giới Platonic trừu tượng? Xét cho cùng thì đây là một trong những điều bí ẩn mà Penrose nêu ra, và chính bản thân Penrose cũng là một người theo trường phái Platonic nhiệt thành. Vì vậy trong lúc này, chúng ta phải chấp nhận một thực tế rằng ngay cả nếu chúng ta có toàn tâm đi theo các nhà Platonic thì câu đố về sức mạnh của toán học vẫn còn chưa thể giải được. Nói như Wigner, “Thật khó có thể tránh được ấn tượng rằng một điều thần kỳ đã đối diện với chúng ta ở đây, mà về bản chất đầy kinh ngạc của nó, có thể so sánh với sự thần kỳ mà trí óc của con người có thể xâu chuỗi hàng ngàn lập luận với nhau mà không mắc một mâu thuẫn nào".

Để đánh giá được đầy đủ tầm cỡ của sự thần kỳ này, chúng ta phải đào sâu vào cuộc sống và di sản của bản thân một số nhân vật thần kỳ - những bộ óc đứng phía sau các khám phá một số định luật toán học chính xác một cách đáng kinh ngạc của tự nhiên.

CHƯƠNG 3

CÁC NHÀ ẢO THUẬT: BẬC THẦY VÀ KẺ DỊ GIÁO

Không giống như 10 điều răn của Chúa, khoa học không được trao cho con người trên những phiến đá đồ sộ. Lịch sử khoa học là câu chuyện về sự thăng trầm của rất nhiều tư biện, giả thuyết và mô hình. Rất nhiều ý tưởng dường như rất thông minh lại hóa ra có sự khởi đầu sai lầm hoặc dẫn vào ngõ cụt. Một số học thuyết một thời được coi là bền vững như bọc thép nhưng sau đó thì tan rã khi được thử lửa bằng những thí nghiệm và quan sát, và cuối cùng trở thành hoàn toàn bỏ đi. Ngay cả trí lực phi thường của những người khởi xướng ra một số khái niệm cũng không thể làm cho những khái niệm đó thoát khỏi sự phế bỏ. Chẳng hạn như Aristotle vĩ đại đã nghĩ rằng đá, quả táo và những vật nặng khác rơi xuống là bởi vì chúng đi tìm vị trí tự nhiên của chúng, tức là ở tâm Trái đất. Khi chúng tiếp đất, Aristotle luận giải, các vật này sẽ tăng tốc bởi vì chúng sung sướng khi được về đến nhà. Trái lại, không khí (và cả lửa nữa), bốc lên trên là bởi vì vị trí tự nhiên của không khí là các mặt cầu trên trời. Tất cả các vật đều có thể được ấn định một bản chất dựa trên mối quan hệ cảm nhận được giữa chúng với những yếu tố cơ bản nhất là đất, lửa, không khí và nước. Theo lời Aristotle:

> Một số vật tồn tại là tự nhiên trong khi những vật khác là do những nguyên nhân khác. Những vật tự nhiên là... những vật thể đơn giản như đất, lửa, không khí và nước... tất cả chúng rõ ràng đều khác với những yếu tố phi tự nhiên, bởi vì mỗi thứ ở bên trong nó đều có một nguyên lý chuyển động và ổn định tại chỗ... Tự nhiên chính là một loại nguyên lý và nguyên nhân của chuyển động và ổn định bên trong các vật này... Những vật có liên quan đến tự nhiên bao gồm cả những vật đó và bất kỳ thứ gì thuộc về chúng, chẳng hạn như chuyển động đi lên thuộc về lửa.

Aristotle thậm chí còn thử phát biểu một định luật mang tính định lượng của chuyển động. Ông khẳng định rằng những vật nặng hơn thì rơi nhanh hơn, với tốc độ tỷ lệ thuận với khối lượng (tức là một vật nặng hơn vật khác 2 lần thì được cho là rơi xuống với tốc độ lớn gấp đôi).Trong khi kinh nghiệm hàng ngày có thể cho thấy quy luật này dường như là hợp lý - quả thật là một viên gạch được quan sát thấy là chạm đất nhanh hơn một chiếc lông chim rơi từ cùng một độ cao - thì Aristotle không bao giờ tiến hành kiểm nghiệm phát biểu định lượng của mình một cách chính xác hơn. Không hiểu sao mà ông không nghĩ ra hay là ông thấy là không cần thiết phải kiểm tra xem nếu buộc hai viên gạch vào nhau thì nó có rơi nhanh gấp hai lần một viên gạch hay không. Galileo Galilei (1564-1642), người có định hướng toán học và thực nghiệm hơn nhiều và cũng là người tỏ ra ít quan tâm tới viên gạch và quả táo rơi, lại là người đầu tiên chỉ ra rằng Aristotle đã hoàn toàn sai lầm. Dùng một thí nghiệm tưởng tượng thông minh, Galileo có thể chứng minh rằng định luật của Aristotle là không có ý nghĩa vì nó không nhất quán về mặt lôgic. Ông lập luận như sau: Giả sử bạn buộc hai vật vào nhau, một vật nặng hơn vật kia. Vậy hai vật sẽ rơi nhanh hơn bao nhiêu so với một trong hai thành phần của nó? Một mặt, theo định luật của Aristotle, bạn có thể kết luận rằng nó sẽ rơi với tốc độ trung gian vì vật nhẹ hơn sẽ rơi chậm hơn vật nặng. Nhưng mặt khác, căn cứ vào chỗ hai vật buộc lại với nhau sẽ nặng hơn hai vật thành phần của nó, và như vậy nó sẽ rơi nhanh hơn cả vật nặng hơn trong hai vật, dẫn đến một mâu thuẫn rất rõ ràng. Lý do duy nhất của việc một cái lông chim rơi xuống đất nhẹ nhàng hơn viên gạch là bởi vì lông chim chịu sức cản của không khí lớn hơn - nếu rơi ở cùng độ cao trong môi trường chân không, thì chiếc lông và viên gạch sẽ rơi xuống đất cùng một lúc. Thực tế này đã được chứng minh trong rất nhiều thí nghiệm, nhưng không có thí nghiệm nào ấn tượng như của David Randolph Scott - nhà du hành vũ trụ trên con tàu Apollo 15. Scott - người thứ bảy bước chân lên Mặt trăng - đã thả rơi đồng thời một cái búa từ tay này và một chiếc lông chim từ tay kia. Vì Mặt trăng rất ít khí quyển nên cái búa và lông chim chạm vào bề mặt của Mặt trăng cùng lúc.

Thực tế đáng kinh ngạc về định luật sai của Aristotle đối với chuyển động không phải là ở chỗ nó sai, mà là ở chỗ nó đã được chấp nhận trong suốt gần hai ngàn năm. Làm thế nào mà một ý tưởng sai lầm như vậy mà lại tồn tại lâu đến thế? Đây là một trường hợp kiểu “cơn bão hoàn hảo” - trong đó ba yếu tố khác nhau kết hợp lại để tạo nên một học thuyết không thể bác bỏ. Thứ nhất, có một thực tế đơn giản là trong điều kiện không có những phép đo chính xác, định luật của Aristotle dường như phù hợp với lẽ phải thông thường dựa trên kinh nghiệm - những mảnh giấy cói bay liệng lơ lửng trong khi những cục chì thì không. Phải có thiên tài của Galileo mới chỉ ra được lẽ phải thông thường cũng có thể sai lầm. Thứ hai, chính sức nặng khổng lồ của danh tiếng và uy quyền của một học giả như Aristotle gần như là vô song. Xét cho cùng, đây là người đã đặt nền móng cho nền văn hóa trí thức phương Tây. Dù là nghiên cứu về tất cả các hiện tượng tự nhiên hay nền tảng vững chắc của đạo đức, siêu hình học, chính trị hay nghệ thuật, Aristotle đều viết thành sách. Và không chỉ có thế. Theo một nghĩa nào đó, Aristotle còn dạy cho chúng ta *cách* tư duy, bằng việc giới thiệu những nghiên cứu hình thức đầu tiên về lôgic. Ngày nay, hầu hết mọi đứa trẻ ở trường đều biết đến hệ thống tiên phong và thực sự hoàn chỉnh về suy luận lôgic của Aristotle, còn được gọi là *phép tam đoạn luận*:

1. Mỗi người Hy lạp là một con người.
2. Mỗi con người đều phải chết
3. Vì vậy mỗi người Hy Lạp đều phải chết.

Lý do thứ ba đối với sự tồn tại dài đến phi lý của lý thuyết sai lầm của Aristotle là ở chỗ nhà thờ Thiên chúa giáo đã chấp nhận lý thuyết này như là một bộ phần chính thống của nó. Điều này có tác dụng như là vật cản trở đối với hầu hết mọi cố gắng định xem xét lại những khẳng định của Aristotle.

Mặc dù có những đóng góp rất ấn tượng đối với việc hệ thống hóa lôgic suy diễn, song Aristotle lại không được ghi nhận là đã có cống hiến cho toán học. Có lẽ cũng hơi đáng ngạc nhiên là người đã xác lập về căn bản khoa học như là một hoạt động có tổ chức lại không quan tâm nhiều (và chắc chắn là không nhiều bằng Plato) đến toán học và thậm chí còn yếu về vật lý học. Mặc dù thậm chí Aristotle đã thừa nhận tầm quan trọng của các mối quan hệ về số và hình học trong khoa học, song ông vẫn xem toán học như là một môn học trừu tượng, tách biệt với thực tại vật lý. Kết quả là trong khi không ai nghi ngờ rằng ông là một nhà máy sản xuất năng lượng trí tuệ thì ông lại *không* nằm trong danh sách "các nhà ảo thuật" toán học của tôi.

Tôi sử dụng thuật ngữ "nhà ảo thuật" ở đây là để chỉ những người có thể lấy ra những con thỏ từ trong một cái mũ hoàn toàn trống rỗng; những người khám phá ra sự kết nối chưa từng được ai nghĩ tới giữa toán học và tự nhiên; những người có thể quan sát các hiện tượng tự nhiên phức tạp và chưng cất ra từ chúng những định luật toán học trong suốt như pha lê. Trong một số trường hợp, những nhà tư tưởng thượng thặng này thậm chí còn sử dụng những thí nghiệm và quan sát của mình để phát triển toán học của họ. Câu hỏi về tính hiệu quả đến phi lý của toán học trong việc giải thích tự nhiên sẽ không bao giờ được đặt ra nếu như không vì những nhà ảo thuật này. Câu đố này nảy sinh trực tiếp từ sự thấu thị phi thường của những nhà nghiên cứu này.

Không có một cuốn sách nào có thể đánh giá được hết tất cả các nhà khoa học và toán học xuất sắc, những người đã có những đóng góp to lớn vào sự hiểu biết của chúng ta về vũ trụ. Trong chương này và chương sau, tôi dự định sẽ chỉ tập trung vào bốn trong số những người khổng lồ đó của các thế kỷ trước, về những người mà vị thế nhà ảo thuật của họ là điều không thể nghi ngờ - đó là những gương mặt tinh hoa tột bậc của thế giới khoa học. Nhà ảo thuật đầu tiên trong danh sách của tôi được ghi nhớ nhất bởi một sự kiện phi thường - ông đã khỏa thân hoàn toàn nhảy bổ ra ngoài đường tại chính thành phố quê hương ông.

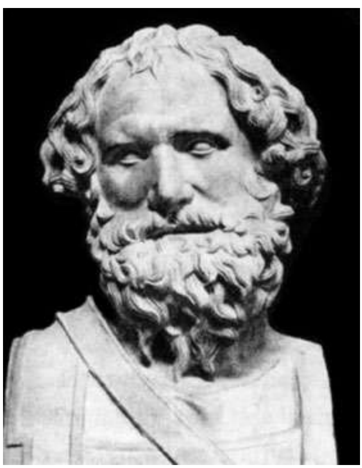
Hãy cho tôi một điểm tựa, tôi sẽ nâng bổng cả Trái đất

Khi nhà lịch sử toán học Eric Temple Bell phải quyết định ai là người đứng trong tốp ba nhà toán học đứng đầu, ông đã kết luận:

> Bất kỳ danh sách ba nhà toán học "vĩ đại nhất" nào trong toàn bộ lịch sử cũng đều phải có cái tên Archimedes. Hai người còn lại thường được gắn với ông, đó là Newton (1642-1727) và Gauss (1777-1855). Một số người, khi xem xét độ phong phú - hay nghèo nàn - tương đối về toán học và khoa học tự nhiên ở thời đại tương ứng mà các vĩ nhân này sinh sống và đánh giá thành tựu của họ trên cái nền chung của thời đại họ, cũng đều đặt Archimedes là người số một.

Archimedes (287-212 trước CN; hình 10 là tượng bán thân được cho là tạc Archimedes, nhưng thực tế rất có thể đó là tượng vua xứ Sparta) thực sự là Newton hay Gauss của thời đại ông; một con người lỗi lạc với trí tưởng tượng phong phú và sự hiểu biết sâu sắc tới mức những người cùng thời và cả những thế hệ sau ông đều thốt lên tên ông trong sự kinh sợ và sùng kính. Mặc dù được biết đến nhiều hơn nhờ những phát minh tài tình về kỹ thuật, song Archimedes, về bản chất, là một nhà toán học và trong toán học của ông thì ông đi trước thời đại của mình hàng thế kỷ. Không may là người ta ít biết về thời tuổi trẻ cũng như gia đình của ông. Tiểu sử đầu tiên của ông, được viết bởi một người trong dòng họ Heracleides, không còn lưu giữ được và vài chi tiết mà chúng ta biết về cuộc đời ông và cái chết thảm khốc của ông về cơ bản là từ các tác phẩm của nhà sử học La Mã Plutarch. Thực ra thì Plutarch (khoảng 46 - 120 sau CN) lại quan tâm nhiều hơn đến những chiến tích của viên tướng La mã Marcellus, người đã chiếm được thành Syracuse, thành phố quê hương của Archimedes vào năm 212 trước CN. Thật may mắn cho lịch sử toán học, Archimedes đã khiến cho Marcellus phải đau đầu trong suốt thời gian bao vây thành Syracuse, khiến cho ba nhà sử học quan trọng về thời đó là Plutarch, Polybius và Livy, không thể bỏ qua ông.

Archimedes sinh ra tại Syracuse, khi đó là thuộc địa của Hy Lạp ở Sicily. Theo sự xác nhận của chính Archimedes thì ông là con trai của nhà thiên văn học Phidias, ít được biết đến ngoại



Hình 10

trừ việc ông đã xác định được tỷ số đường kính của Mặt trời và Mặt trăng. Archimedes hình như cũng có họ hàng gì đó với Vua Hieron II, và bản thân ông vua này là con ngoài giá thú của một người đàn ông quý tộc (với một trong những nữ nô lệ của mình). Bất kể mối quan hệ giữa Archimedes với gia đình hoàng gia là thế nào đi nữa thì cả vua và con trai ông là Gelon đều luôn trọng vọng Archimedes. Khi còn trẻ, Archimedes sống một thời gian ở Alexandria, tại đây ông học toán trước khi trở về cuộc sống nghiên cứu rộng lớn hơn ở Syracuse.

Archimede thực sự là một nhà toán học của các nhà toán học. Theo Plutarch, ông coi "mọi thứ nghệ thuật hướng vào việc sử dụng và kiếm lời đều hèn hạ và bẩn thỉu, và ông chỉ cố gắng theo đuổi những điều mà, với vẻ đẹp và sự tuyệt vời của chúng, nằm ngoài mọi sự tiếp xúc với những nhu cầu thông thường của cuộc sống". Mối bận tâm của Archimedes với toán học trừu tượng và mức độ mà ông đốt cháy mình cho nó rõ ràng là vượt xa hơn rất nhiều nhiệt huyết thường được thể hiện của những người thực hành nó. Cũng theo Plutarch:

> Bị mê hoặc thường xuyên bởi một Nữ nhân ngư luôn đồng hành cùng với ông, ông quên cả ăn uống và xao lãng cả việc chăm sóc bản thân mình, và khi, mà điều này cũng thường xảy ra, bị buộc phải đi tắm và xức dầu thì ông vẫn tiếp tục vẽ các hình hình học trên đống tro hoặc dùng ngón tay vẽ trên chính cơ thể đang xức dầu của mình, chìm đắm trong trạng thái xuất thần và sự thực là làm nô lệ cho các nàng thơ.

Mặc cho sự coi thường của ông đối với toán học ứng dụng và tầm quan trọng nhỏ nhoi mà bản thân ông dành cho các ý tưởng kỹ thuật của mình, thì những sáng chế tài tình của Archimedes lại mang đến cho ông sự nổi tiếng còn hơn là thiên tài toán học của ông.

Huyền thoại nổi tiếng nhất về Archimedes đã làm nổi bật hơn nữa hình ảnh về một nhà toán học đãng trí điển hình. Câu chuyện vui này lần đầu tiên được kiến trúc sư La Mã Vitruvius kể vào thế kỷ 1 trước CN, và nó như thế này: Vua Hieron muốn cúng tiến một vòng hoa bằng vàng lên các vị thần bất tử. Khi vòng hoa được dâng lên nhà vua, nó nặng đúng bằng số vàng được cung cấp để chế tác ra nó. Tuy nhiên, nhà vua thì nghi ngờ rằng một lượng vàng đã bị thay thế bằng bạc với cân nặng tương đương. Không thể chứng minh được sự nghi ngờ của mình, nhà vua đã xin ý kiến bậc thầy của các nhà toán học là Archimedes. Truyền thuyết kể rằng, một hôm Archimedes bước vào bồn tắm trong khi vẫn còn đang đăm chiêu với vấn đề làm thế nào để vạch trần sự dối trá tiềm tàng với vòng hoa bằng vàng này. Tuy nhiên, khi ông dìm mình vào trong nước, ông nhận thấy cơ thể mình đã thay thế một thể tích nước nhất định - lượng nước đã trào ra bên ngoài thành bồn. Quá phấn khích, Archimedes đã nhảy ra khỏi bồn tắm và vừa trần truồng chạy ra ngoài đường phố vừa hét lên "*Eureka, eureka!*" (Tìm ra rồi, tìm ra rồi!)

Một tuyên bố nổi tiếng nữa của Archimedes, "Hãy cho tôi một điểm tựa, tôi sẽ nâng bổng cả Trái đất", ngày nay được tìm thấy trên hơn 150.000 trang web (với nhiều phiên bản khác nhau) bằng công cụ Google. Tuyên ngôn táo bạo này, nghe như lời quảng bá hình ảnh của một tập đoàn, đã được trích dẫn bởi Thomas Jefferson, Mark Twain, và John F. Kenedy và nó thậm chí còn được đưa vào thơ của Lord Byron. Câu nói này rõ ràng là đỉnh điểm của những nghiên cứu của Archimedes về vấn đề di chuyển một vật nặng đã cho với một lực đã cho. Plutarch kể tiếp rằng khi Vua Hieron yêu cầu một minh chứng thực tiễn về khả năng của Archimedes nâng một vật nặng lớn bằng một lực nhỏ, Archimedes đã tìm được cách - sử dụng một ròng rọc kép - để hạ thủy một con tàu chất đầy hàng ra biển. Plutarch kể thêm đầy ngưỡng mộ rằng "ông đã kéo con tàu một cách nhẹ nhàng và an toàn như thể nó đang lướt trên mặt biển vậy" Có những dị bản thay đổi chút ít về cùng truyền thuyết này ở các nguồn khác nhau. Trong khi khó mà tin được Archimedes thực sự có thể di chuyển nguyên cả một con tàu bằng những thiết bị máy móc sẵn có ở thời đại ông, thì các truyền thuyết thường khẳng định gần như chắc chắn rằng ông đã chứng minh được một cách đầy ấn tượng về một sáng chế giúp ông có thể di chuyển những vật nặng.

Archimedes đã có rất nhiều những sáng chế khác cho thời bình, như máy bơm trục vít để đẩy nước lên cao và một cung thiên văn để minh họa cho chuyển động của các thiên thể, song ông trở nên nổi tiếng nhất ở thời cổ đại là nhờ vai trò của ông trong việc bảo vệ thành Syracuse trước quân La Mã.

Các cuộc chiến tranh luôn được các nhà sử học ngưỡng mộ. Chính vì vậy, những sự kiện liên quan đến cuộc vây hãm thành Syracuse của quân La Mã trong suốt những năm từ 214 đến 212 trước CN đã được ghi chép một cách hoang phí bởi rất nhiều nhà sử học. Tướng La Mã Marcus Claudius Marcellus (khoảng 268-208 trước CN), vào thời đó tiếng tăm nổi như cồn, đã dự đoán sẽ có một chiến thắng thần tốc. Nhưng rõ ràng là ông đã đánh giá sai sự ngoan cường của vua Hieron với sự hỗ trợ của một thiên tài kỹ thuật và toán học. Plutarch đã mô tả hết sức sinh động sức tàn phá mà các máy móc của Archimedes giáng vào quân La Mã:

> Ông [Archimedes] ngay lập tức bắn thẳng vào quân đổ bộ bằng tất cả các loại vũ khí phóng đạn, và những khối đá lớn rơi xuống với âm thanh khủng khiếp và dữ dội; không quân lính nào có thể trụ vững; họ bị đốn ngã chồng lên nhau, làm rối loạn cả hàng ngũ. Đồng thời, những cây sào lớn thọc ra từ các bức tường vươn tới các con tàu, làm đắm một số tàu bằng những vật nặng được thả xuống từ trên cao; những con tàu khác thì bị nhấc bổng lên không trung bằng một cánh tay sắt hay một cái mỏ giống như mỏ sếu, và tàu bị nhấc dựng đứng lên, mũi ở trên đuôi ở dưới, rồi bị thả cắm xuống đáy biển... Một con tàu thường bị nhấc lên một độ cao lớn (trông thật khủng khiếp), lắc qua lắc lại, và cứ đu đưa như thế cho đến khi toàn bộ thủy thủ đoàn văng hết ra ngoài, rồi toàn bộ chiều dài của con tàu va mạnh vào vách đá hoặc thả rơi xuống.

Nỗi sợ hãi những thiết bị của Archimedes trở nên khủng khiếp tới mức "nếu họ [lính La Mã] mà nhìn thấy một mẩu dây hay khúc gỗ thò ra phía trên tường là họ hét toáng lên "lại nữa kìa", để báo với nhau rằng Archimedes đang thiết đặt một cỗ máy nào đó chuẩn bị tấn công họ, và thế là họ quay lưng bỏ chạy". Ngay cả Marcellus cũng bị ấn tượng sâu sắc đến mức phải than phiền với đội ngũ kỹ sư quân sự của mình rằng: "Liệu chúng ta không thể chấm dứt trận chiến với những con quỷ Briareus (con quái vật khổng lồ hàng trăm tay trong thần thoại Hy Lạp, là con trai của Uranus - Thần bầu trời và Gaia - Nữ thần đất), đang ngồi thoải mái trên bờ biển và chơi trò đánh đáo sấp ngửa với những con tàu của chúng ta, khiến chúng ta phải bối rối, và bằng vô số những máy phóng đạn dồn dập bắn vào chúng ta còn khủng khiếp hơn cả những con quái vật trăm tay khổng lồ trong thần thoại hay sao?".

Theo một truyền thuyết dân gian nổi tiếng khác xuất hiện lần đầu tiên trong các tác phẩm của nhà vật lý Hy Lạp vĩ đại Galen (khoảng 129-200 sau CN), thì Archimedes đã sử dụng một tập hợp các gương làm hội tụ ánh sáng Mặt trời để đốt cháy tàu của quân La Mã. Kiến trúc sư người Byzantine thế kỷ thứ 6 là Anthemius xứ Tralles và thậm chí một số nhà sử học thế kỷ 20 đều nhắc lại câu chuyện thần kỳ này, mặc dù tính khả thi thực sự của một kỳ công như vậy vẫn còn có chỗ đáng ngờ. Tuy nhiên, tập hợp các câu chuyện gần như thần thoại đã cung cấp cho chúng ta rất nhiều bằng chứng cùng với sự tôn kính rằng "con người thông thái ấy" đã truyền cảm hứng cho rất nhiều thế hệ sau đó.

Như tôi đã đề cập ở trên, bản thân Archimedes - được ca ngợi như một "Briareus hình học" - không coi mấy thứ đồ chơi chiến tranh của mình có ý nghĩa đặc biệt gì lắm; ông chủ yếu xem chúng chỉ như một trò tiêu khiển về hình học. Không may là thái độ hờ hững này cuối cùng lại khiến ông phải trả giá bằng chính mạng sống của mình. Khi quân La Mã cuối cùng cũng chiếm được thành Syracuse, Archimedes lúc đó còn đang quá bận rộn với việc vẽ những sơ đồ hình học của mình trên một cái khay đổ đầy cát, đến mức ông không nhận thấy sự nhộn nhạo của cuộc chiến đang diễn ra xung quanh. Theo một số bản ghi ghép thì khi một tên lính La Mã yêu cầu Archimedes phải theo anh ta tới gặp Marcellus, thì nhà hình học già đã giận dữ đáp lại: "Này anh kia, hãy tránh xa các hình vẽ của ta". Câu trả lời của ông đã khiến tên lính giận điên lên, tới mức bất tuân mệnh lệnh của chỉ huy, hắn đã rút gươm và đâm chết nhà toán học vĩ đại nhất thời cổ đại. Hình 11 được cho là bản sao (từ thế kỷ 18) của một bức tranh khảm được tìm thấy ở Herculaneum mô tả những giây phút cuối cùng trong cuộc đời của "bậc thầy".

Theo một nghĩa nào đó thì cái chết của Archimedes đã đánh dấu sự kết thúc của một kỷ nguyên sôi động phi thường trong lịch sử toán học. Như nhà toán học và triết học người Anh Alfred North Whitehead đã nhận xét:

> Cái chết của Archimedes trong tay của một tên lính La Mã là tượng trưng cho một sự thay đổi thế giới có tầm quan trọng bậc nhất. Người La Mã là một chủng tộc vĩ đại, song họ đã bị nguyền rủa bởi sự tuyệt diệt đang chờ. Họ không phải là những người mơ mộng đủ để đi đến những quan điểm mới, có thể giúp họ kiểm soát một cách cơ bản hơn các lực lượng của tự nhiên. Không người La Mã nào hy sinh cuộc đời mình chỉ vì anh ta đang quá chú tâm chiêm ngưỡng một sơ đồ toán học.

May mắn thay, trong khi các chi tiết về cuộc đời của Archimedes thì rất hiếm hoi nhưng nhiều (chứ không phải tất cả) những ghi chép phi thường của ông vẫn còn tồn tại. Archimedes có thói quen gửi các ghi chép về những khám phá toán học của mình cho một vài người bạn là nhà toán học hoặc những người mà ông kính trọng. Một danh sách độc nhất những người có trao đổi thư từ với ông (ngoài những người khác ra) có nhà thiên văn học Conon ở

Hình 11

Samos, nhà toán học Eratosthennes ở Cyrene, và hoàng tử Gelon. Sau cái chết của Conon, Archimedes đã gửi một số ghi chép cho người học trò của Conon là Dositheus ở Pelusium.

Các công trình của Archimedes bao trùm một phạm vi đáng kinh ngạc về toán học và vật lý học. Trong số những thành tựu của ông: đã đưa ra những phương pháp chung để tính diện tích của rất nhiều hình phẳng và thể tích của vùng không gian được giới hạn bởi tất cả các loại mặt cong khác nhau. Ví dụ như diện tích hình tròn, các đoạn của một parabol và của hình xoắn ốc và thể tích của các phần hình trụ, hình nón và các hình khác tạo bởi sự quay của các parabol, elíp và hyperbol. Ông cũng chứng tỏ được rằng giá trị của số π, tức tỷ số của chu vi một đường tròn và đường kính của nó, phải lớn hơn $3\ ^{10}\!/_{71}$ và nhỏ hơn $3\ ^{1}\!/_{7}$. Vào thời đại mà không có phương pháp nào hiện có để mô tả những con số cực lớn, ông đã phát minh ra một hệ thống cho phép không chỉ ghi lại mà còn tính toán được với các số có độ lớn bất kỳ. Trong vật lý học, Archimedes đã khám phá ra các quy luật chi phối các vật thể nổi, nhờ đó thiết lập ra một khoa học về thủy tĩnh. Ngoài ra, ông cũng đã xác định được trọng tâm của nhiều hình khối ba chiều và phát biểu những định luật cơ học của đòn bẩy. Trong thiên văn học, ông đã thực hiện những quan sát nhằm xác định khoảng thời gian của năm và khoảng cách giữa các hành tinh.

Các công trình của nhiều nhà toán học Hy Lạp thường được đặc trưng bởi tính độc đáo và sự chú ý đến tiểu tiết. Tuy nhiên, các phương pháp giải và suy luận của Archimedes thực sự đã đặt ông ở vị trí khác biệt so với tất cả các nhà khoa học cùng thời. Tôi sẽ trình bày dưới đây chỉ ba ví dụ tiêu biểu để các bạn phần nào được thưởng thức hương vị sáng tạo tài tình của Archimedes. Một ví dụ mà thoạt nhìn thì không khác gì một sự hiếu kỳ buồn cười, nhưng nếu xem xét kỹ hơn sẽ thấy chiều sâu trí tuệ đầy tò mò của ông. Hai ví dụ còn lại minh họa cho các phương pháp của Archimedes, chúng cho thấy tư tưởng đi trước thời đại của ông, khiến cho chúng ngay lập tức nâng Archimedes lên địa vị mà tôi gọi là “nhà ảo thuật”.

Archimedes rõ ràng là bị hấp dẫn bởi những con số cực lớn. Nhưng những con số rất lớn thì lại rất cồng kềnh khi phải viết theo ký hiệu thông thường (bạn hãy thử viết một tấm séc cá nhân trị giá 8,4 nghìn tỷ đôla, đó là nợ quốc gia của Mỹ vào tháng 7 năm 2006, trong khoảng trống ở phần ghi số tiền thì sẽ thấy). Vì vậy, Archimedes đã phát minh một hệ thống cho phép ông biểu thị các số với 80.000 nghìn tỷ chữ số. Sau đó, ông đã sử dụng hệ thống này trong một chuyên luận với tựa đề *Người đếm cát*, để chứng tỏ rằng tổng số các hạt cát trong thế giới này không phải vô hạn.

Ngay cả phần giới thiệu về chuyên luận này cũng có tính chất soi sáng đến mức tôi sẽ trình bày lại một phần ở đây (toàn bộ đoạn này đã được gửi cho Gelon, con trai của Vua Hieron II).

> Tâu đức vua Gelon, có một số người nghĩ rằng số hạt cát là nhiều vô hạn; và ý của thần không phải chỉ là cát ở Syracuse và phần còn lại của Sicily mà là ở khắp mọi nơi có người ở cũng như không có người ở. Lại nữa, có những người, không xem nó là vô hạn song cho rằng không có số nào đã được đặt tên là đủ lớn tới mức vượt quá số lượng đó. Nhưng mặt khác, rõ ràng rằng họ, những người có quan điểm này, nếu họ có thể hình dung được khối lượng tạo bởi cát lớn như khối lượng Trái đất, bao gồm trong nó tất cả các đại dương và thung lũng chứa đầy cát cao bằng những ngọn núi cao nhất, thì họ sẽ còn đi xa hơn nhiều lần so với sự thừa nhận rằng bất kỳ con số nào vượt quá số lượng cát đó đều có thể biểu diễn được. Nhưng thần sẽ cố gắng chứng tỏ với bệ hạ bằng những chứng minh hình học, mà bệ hạ có thể dễ dàng theo dõi, rằng trong số các con số do thần đặt tên và được trình bày trong tác phẩm mà thần đã gửi cho Zeuxippus [một tác phẩm mà không may đã bị thất lạc], có một số con số không chỉ vượt quá khối lượng cát tương đương với số cát

> chứa đầy trên Trái đất như thần đã mô tả ở trên mà còn vượt cả khối lượng cát trong toàn vũ trụ. Giờ thì bệ hạ đã biết rằng "vũ trụ" là cái tên mà hầu hết các nhà thiên văn học dùng để đặt cho cái hình cầu mà trung tâm của nó là tâm Trái đất và bán kính của nó bằng khoảng cách từ tâm Mặt trời đến tâm Trái đất. Đây là cách giải thích thông thường mà chắc là bệ hạ đã được nghe từ các nhà thiên văn học. Nhưng Aristarchus ở Samos đã đưa ra một cuốn sách bao gồm một số giả thuyết, trong đó có những tiền đề đã dẫn đến kết quả là vũ trụ lớn hơn rất nhiều so với cái mà ngày nay chúng ta đang gọi. Giả thuyết của ông ấy cho rằng các ngôi sao là cố định và Mặt trời thì vẫn đứng yên, còn Trái đất thì quay xung quanh Mặt trời theo một đường tròn, mà Mặt trời nằm ở trung tâm của quỹ đạo tròn ấy.

Phần giới thiệu này ngay lập tức làm nổi bật hai điểm quan trọng: (1) Archimedes đã sẵn sàng nghi vấn ngay cả những niềm tin phổ biến nhất (như niềm tin có một lượng vô hạn các hạt cát), và (2) ông đã bày tỏ sự tôn trọng đối với học thuyết nhật tâm của nhà thiên văn Aristarchus (mà sau này trong chuyên luận, ông thực sự còn sửa lại một trong số các giả thuyết của Aristarchus). Trong vũ trụ của Aristarchus thì Trái đất và các hành tinh quay xung quanh Mặt trời đứng yên được đặt ở trung tâm (hãy nhớ rằng mô hình này đã được đưa ra trước Copernicus 1.800 năm!). Sau những nhận xét sơ bộ này, Archimedes bắt đầu nói đến vấn đề về số hạt cát, bằng một chuỗi các bước lôgic. Đầu tiên, ông ước lượng có bao nhiêu hạt cát đặt cạnh nhau trên đường kính của một hạt anh túc. Sau đó là bao nhiêu hạt anh túc trên bề rộng của ngón tay; bao nhiêu ngón tay trên một *stadium* (khoảng 185m); và cứ tiếp tục như vậy cho đến 10 tỷ *stadium*. Trong quá trình đó, ông đã phát minh ra một hệ thống các chỉ số và ký hiệu mà khi kết hợp với nhau, sẽ cho phép ông phân lớp các con số khổng lồ của mình. Vì Archimedes giả định rằng mặt cầu chứa các ngôi sao cố định lớn hơn dưới 10 triệu lần so với mặt cầu chứa quỹ đạo của Mặt trời (nhìn từ Trái đất), ông đã tính được số hạt trong một vũ trụ chứa đầy cát là ít hơn 10^{63} (một kèm theo 63 số 0 tiếp sau). Sau đó ông đã kết luận chuyên luận với những lời lẽ rất kính trọng đối với Gelon:

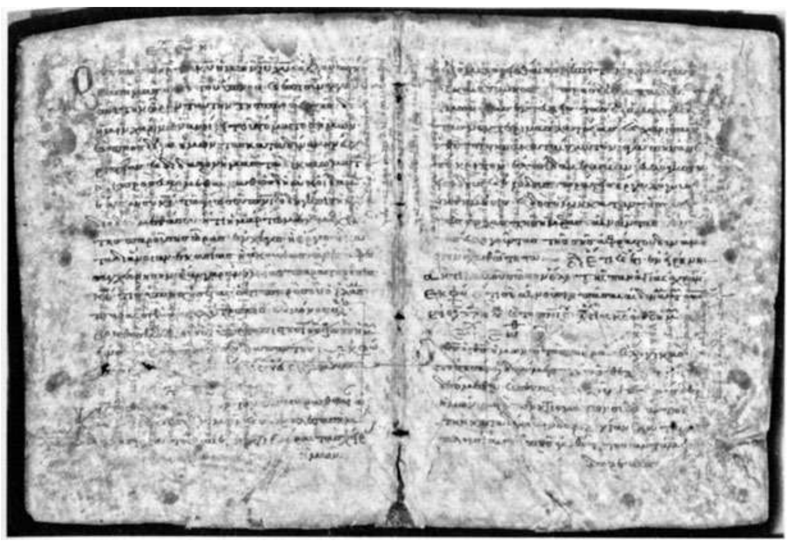
> Tâu đức vua Gelon, thần hiểu rằng những điều này có vẻ như không thể tin nổi đối với đa số những người không nghiên cứu toán học, song với những người đã thông thạo với điều đó và đã từng suy nghĩ về khoảng cách và kích thước của Trái đất và Mặt trời và Mặt trăng và cả vũ trụ thì chứng minh này là có sức thuyết phục. Và đó chính là lý do mà thần nghĩ rằng vấn đề này không phải là không thích hợp với sự suy xét của Người.

Vẻ đẹp của *Người đếm cát* nằm ở sự dễ dàng mà Archimedes lấy từ những đồ vật trong cuộc sống hàng ngày (hạt anh túc, cát, ngón tay) để trừu tượng hóa các con số và ký hiệu toán học, rồi sau đó từ chúng quay trở lại kích thước của hệ Mặt trời và cả vũ trụ. Rõ ràng là Archimedes đã sở hữu một sự linh hoạt về trí tuệ tới mức ông có thể dễ dàng áp dụng toán học của mình để khám phá ra những tính chất chưa biết của vũ trụ, và sử dụng những đặc tính của vũ trụ để phát triển những khái niệm số học.

Chuyện thứ hai về Archimedes khiến ông xứng đáng với danh hiệu "nhà ảo thuật" là phương pháp mà ông đã sử dụng để thu được rất nhiều định lý hình học xuất sắc. Người ta biết rất ít về phương pháp này cũng như quá trình tư duy của Archimedes nói chung cho đến tận thế kỷ 20. Cái phong cách cô đọng của ông đã để lại rất ít đầu mối. Sau đó, vào năm 1906, một khám phá hết sức ấn tượng đã mở ra một cửa sổ vào trí óc của thiên tài này. Câu chuyện về khám phá này đọc giống như một trong các tiểu thuyết về những bí ẩn lịch sử của tác giả và triết gia người Ý, tên là Umberto Eco, nên tôi cảm thấy buộc phải lạc đề một chút để nói về nó.

Bản viết trên tấm da cừu nạo của Archimedes

Vào thế kỷ thứ 10, một người sao chép bản thảo nặc danh ở Constantinople (nay là Istanbul) đã sao lại ba tác phẩm quan trọng của Archimedes: *Phương pháp, Stomachion* và *Về các vật thể nổi.* Rất có thể đây là phần được nhiều người quan tâm trong toán học Hy Lạp và được khơi mào mạnh mẽ bởi nhà toán học thế kỷ 9 Leo Nhà Hình học. Tuy nhiên, vào năm 1204, quân lính của cuộc Thập tự chinh thứ tư đã bị cám dỗ bởi lời hứa hỗ trợ tài chính cho việc cướp bóc thành Constantinople. Trong những năm tiếp theo, sự đam mê đối với toán học đã phai nhạt dần, trong khi sự ly khai giữa Giáo hội Cơ đốc và Giáo hội Chính thống giáo đã trở thành *sự đã rồi*. Vào trước năm 1229, bản thảo có chứa các tác phẩm của Archimedes phải trải qua một quá trình tái chế thê thảm - nó được tháo ra và tẩy rửa để có thể tái sử dụng các tấm da cho việc chép kinh thánh Thiên chúa. Viên thư ký Ioannes Myronas đã hoàn tất việc sao chép này vào ngày 14 tháng 4 năm 1229. May mắn thay, việc tẩy rửa các chữ viết đã không làm mất hoàn toàn văn bản gốc. Hình 12 cho thấy một trang từ bản thảo với các dòng ngang là kinh thánh và những chữ mờ mờ theo hàng dọc chính là các nội dung toán học. Đến thế kỷ 16, tấm da cừu - bản đã được tái chế - không hiểu bằng cách nào đã tới được Holy Land, một tu viện ở St. Sabas, phía đông Bethlehem. Vào đầu thế kỷ 19, thư viện của tu viện này đã có tới gần một ngàn bản thảo. Tuy nhiên, vì lý do nào đó không rõ, tấm da cừu chép tác phẩm của Archimedes lại một lần nữa chuyển đến Constantinople. Sau đó, vào những năm 1840, một học giả về kinh thánh nổi tiếng của Đức tên là Constantine Tischendorf (1815-74), người đã khám phá ra một trong những bản Kinh thánh đầu tiên, đã đến thăm Nhà khách



Hình 12

của tu viện Holy Sepulcher ở Constantinople (phân khu xứ đạo thuộc Giáo trưởng Hy Lạp ở Jerusalem) và đã thấy tấm da cừu này ở đó. Chắc có lẽ Tischendorf đã phát hiện ra văn bản toán học ở bên dưới còn nhìn thấy được một phần là khá hấp dẫn, vì ông đã xé trộm một trang từ bản thảo. Khi gia sản của Tischendorf được đem bán thì trang này đã được chuyển đến thư viện của Đại học Cambridge vào năm 1879.

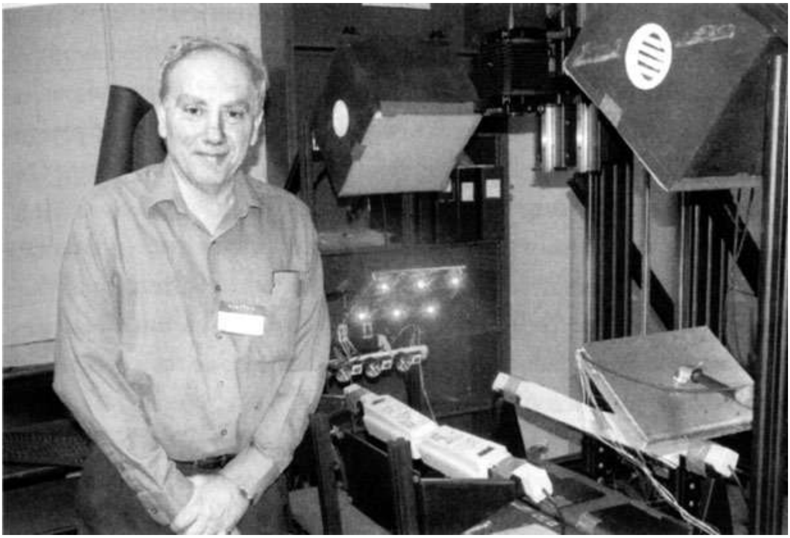
Năm 1899, học giả Hy Lạp là A. Papadopoulos-Keramus đã sắp xếp lại tất cả các bản thảo ở Metochion, và bản thảo tác phẩm của Archimedes mang ký hiệu Ms. 355 trong danh mục của ông. Papadopoulos-Keramus đã đọc được một vài dòng trong văn bản toán học này, và có lẽ do nhận ra tầm quan trọng tiềm ẩn của nó, ông đã cho in mấy dòng này vào tập catalô của mình. Đây là một bước ngoặt trong câu chuyện truyền kỳ về bản thảo này. Các dòng về toán học ghi trong catalô đã thu hút sự chú ý của nhà triết học Đan Mạch Johan Ludvig Heiberg (1854-1928). Nhận ra văn bản này thuộc về Archimedes, Heiberg đã đến Istanbul vào năm 1906, nghiên cứu và chụp ảnh tấm da cừu, và một năm sau đã thông báo về khám phá gây chấn động của mình - hai chuyên luận chưa bao giờ được biết đến của Archimedes và một chuyên luận trước đây đã được biết đến nhưng chỉ từ bản dịch tiếng Latinh của nó. Thậm chí mặc dù Heiberg đã có thể đọc được và sau đó đã cho xuất bản các phần của bản thảo này trong cuốn sách của mình về các tác phẩm của Archimedes, song vẫn còn những lỗ hổng nghiêm trọng. Thật không may, sau năm 1908, bản thảo đã biến mất khỏi Istanbul trong những hoàn cảnh hết sức bí ẩn, và chỉ xuất hiện trở lại thuộc sở hữu của một gia đình ở Paris, người đã tuyên bố rằng đã có nó từ những năm 1920. Do được cất giữ không được tốt nên tấm da cừu đã bị hư hỏng nặng không thể khôi phục được và ba trang đã được Heiberg dịch trước đây đã bị mất hoàn toàn. Thêm vào đó, sau năm 1929, có ai đó đã vẽ bốn hình minh họa theo phong cách Byzantine trên 4 trang. Cuối cùng thì gia đình người Pháp giữ bản thảo đó đã gửi đến nhà Christie để bán đấu giá. Quyền sở hữu bản thảo này đã được đưa ra tranh cãi tại tòa án liên bang tại New York vào năm 1998. Phân khu xứ đạo thuộc Giáo trưởng chính thống Hy Lạp ở Jerusalem đã tuyên bố rằng bản thảo này đã bị đánh cắp vào những năm 1920 ở một trong các tu viện của nó, song quan tòa lại phán quyết phần thắng thuộc về nhà Christie's. Tấm da cừu sau cùng đã được đấu giá ở nhà Christie's vào ngày 29 tháng 10 năm 1998 với giá 2 triệu đôla bởi một người mua vô danh. Người chủ mới này đã gửi bản thảo của Archimedes vào Bảo tàng Nghệ thuật Walters ở Baltimore, nơi nó hiện vẫn đang được bảo quản nghiêm ngặt và nghiên cứu kỹ lưỡng. Các nhà khoa học về hình ảnh hiện đại có trong tay những công cụ mà những nhà nghiên cứu trước đó không thể có. Tia cực tím, kỹ thuật tạo hình đa phổ và thậm chí cả các tia X tụ tiêu (mà tấm da cừu đã được phơi sáng đối với loại tia này tại Trung tâm Máy gia tốc tuyến tính ở Stanford) đã thực sự giúp cho việc giải mã các phần của bản thảo mà trước đây chưa đọc được. Trong khi tôi viết cuốn sách này thì việc nghiên cứu tỷ mỉ bản thảo của Archimedes bằng các phương pháp khoa học vẫn còn đang tiếp tục. Tôi có cái may mắn được gặp gỡ với nhóm xử lý tấm da cừu và hình 13 chụp tôi đứng bên cạnh thiết bị thí nghiệm khi nó chiếu sáng một trang của tấm da cừu với những bước sóng khác nhau.

Câu chuyện đầy kịch tính xung quanh tấm da cừu chỉ là một tư liệu đem đến cho chúng ta một chút ý niệm chưa bao giờ biết tới về phương pháp của nhà hình học vĩ đại này.

Phương pháp

Khi đọc bất kỳ cuốn sách nào về hình học Hy Lạp, bạn không thể không ấn tượng bởi phương pháp tiết kiệm và chính xác mà các định lý được phát biểu và chứng minh hơn hai thiên niên kỷ trước. Tuy nhiên, điều mà những cuốn sách đó thường không làm là không cho bạn những gợi ý rõ ràng về chuyện những định lý đó đã được nghĩ ra như thế nào. Tác phẩm hiếm có *Phương pháp* của Archimedes phần nào đã lấp đầy khoảng trống hấp dẫn này - nó tiết lộ cho chúng ta biết bản thân Archimedes đã bị thuyết phục như thế nào bởi chân lý của một số định lý trước khi ông biết cách chứng minh chúng. Dưới đây là một phần những gì mà ông đã viết cho nhà toán học Eratosthenes ở Cyrene (khoảng 276-194 trước CN) trong phần giới thiệu như sau:

> Tôi sẽ gửi ông những chứng minh của các định lý đó trong cuốn sách này. Vì, như tôi đã nói, tôi biết rằng ông rất cần mẫn, một thầy giáo triết học tuyệt vời, và rất quan tâm đến bất kỳ nghiên cứu toán học nào mà ông gặp, nên tôi nghĩ sẽ là thích hợp nếu ghi lại và gửi trước đến ông cùng cuốn sách này một phương pháp đặc biệt, mà nhờ đó ông sẽ có thể nhận ra một số vấn đề toán học *với sự hỗ trợ của cơ học* [tác giả nhấn mạnh]. Tôi tin rằng điều



Hình 13

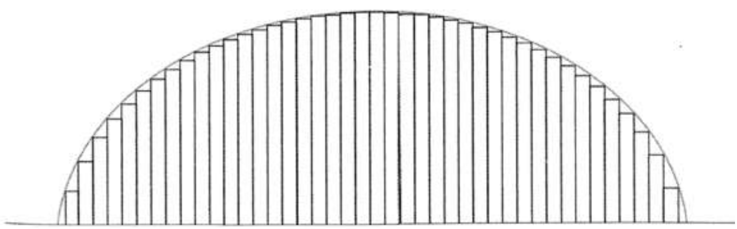
này sẽ không ít hữu dụng để tìm ra chứng minh cho các định lý này. Đối với một số điều thì trước hết nó trở nên rõ ràng với tôi nhờ phương pháp cơ học, rồi sau đó mới được chứng minh bằng hình học, bởi vì việc nghiên cứu những điều đó bằng phương pháp vừa nói không cung cấp cho ta một chứng minh thực sự nào. Vì việc đưa ra một chứng minh khi chúng ta đã có được từ trước một số hiểu biết về các vấn đề này, bằng phương pháp nói trên, sẽ là dễ hơn tìm kiếm nó mà không có một chút hiểu biết nào từ trước.

Archimedes ở đây đã chạm đến một trong những điểm quan trọng nhất trong nghiên cứu khoa học và toán học - thường thì việc khám phá những vấn đề hay định lý quan trọng sẽ khó khăn hơn là tìm lời giải cho những vấn đề đã biết hay tìm chứng minh cho những định lý đã biết. Vậy, làm thế nào mà Archimedes khám phá ra những định lý mới? Sử dụng những hiểu biết bậc thầy của mình về cơ học, về sự cân bằng và các nguyên lý đòn bẩy, ông đã cân trong đầu mình những hình khối hoặc các hình mà ông muốn tìm thể tích hay diện tích của chúng dựa trên những khối và hình mà ông đã biết. Sau khi bằng cách này xác định được đáp số cho những diện tích hay thể tích chưa biết, ông thấy rằng việc chứng minh bằng hình học sự đúng đắn của các đáp số đó sẽ dễ dàng hơn nhiều. Do vậy, cuốn *Phương pháp* bắt đầu với một số phát biểu về trọng tâm và chỉ sau đó mới trình bày đến các mệnh đề hình học và phần chứng minh những mệnh đề đó.

Phương pháp của Archimedes rất đặc biệt ở hai khía cạnh. Thứ nhất, về thực chất ông đã đưa khái niệm *thí nghiệm tưởng tượng* vào nghiên cứu khoa học chặt chẽ. Nhà vật lý thế kỷ 19 Hans Christian Ørsted lần đầu tiên đã gọi tên công cụ này - một thí nghiệm tưởng tượng được thực hiện thay cho một thí nghiệm thực - là *Gedankenexperiment* (tiếng Đức có nghĩa là "thí nghiệm được thực hiện trong ý nghĩ"). Trong vật lý học, lĩnh vực mà khái niệm này cực kỳ có hiệu quả, thì các thí nghiệm tưởng tượng được sử dụng hoặc là để cung cấp những hiểu biết sâu sắc trước khi thực hiện các thí nghiệm thực hoặc trong trường hợp mà các thí nghiệm thực không thể tiến hành được. Thứ hai, và cũng quan trọng hơn, là Archimedes đã giải phóng toán học khỏi những xiềng xích phần nào do chính con người tạo ra mà Euclid và Plato đã quàng vào nó. Với hai nhân vật lẫy lừng này thì có một và chỉ một cách để làm toán. Bạn phải bắt đầu từ các tiên đề rồi tiến hành một chuỗi bất di bất dịch các bước lôgic, với sự sử dụng các công cụ được quy định chặt chẽ. Ngược lại, Archimedes với tâm hồn tự do đã đơn giản tận dụng mọi thứ vũ khí mà ông có thể nghĩ ra để phát biểu những bài toán mới và giải chúng. Ông không ngần ngại khám phá và khai thác những mối liên hệ giữa những đối tượng toán học trừu tượng (các dạng Platonic) và thực tại vật lý (các hình khối hoặc các vật thể phẳng) để phát triển toán học của mình.

Một minh họa cuối cùng nhằm củng cố thêm địa vị nhà ảo thuật của Archimedes đó là sự tiên liệu của ông về *phép tính vi tích phân* - một nhánh của toán học đã được phát triển một cách hình thức bởi Newton (và một cách độc lập bởi nhà toán học Đức Leibniz) chỉ mãi vào cuối thế kỷ 16.

Ý tưởng cơ bản nằm phía sau quá trình *tích phân* thực ra rất đơn giản (một khi nó đã được chỉ rõ!). Giả sử bạn cần tính diện tích một phần của hình elíp. Bạn có thể chia vùng này thành nhiều hình chữ nhật có bề rộng như nhau rồi tính tổng diện tích của các hình chữ nhật đó (H.14). Rõ ràng là bạn sử dụng càng nhiều hình chữ nhật như vậy thì tổng thu được càng gần với diện tích thực của phần cần tính. Nói cách khác, diện tích chính xác của phần elíp đúng bằng giới hạn mà tổng diện tích các hình chữ nhật này



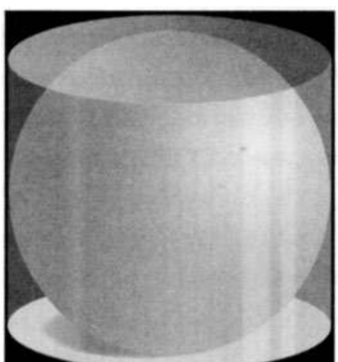
Hình 14

tiến tới khi số các hình chữ nhật tăng lên vô hạn. Tìm giới hạn này được gọi là phép *tích phân*. Archimedes đã sử dụng một phiên bản của phương pháp mà tôi vừa mô tả để tính thể tích và diện tích bề mặt của các hình cầu, hình nón và cả các elipxoit và paraboloit (những hình khối nhận được khi quay các elíp hoặc parabol quanh trục của chúng).

Trong *phép tính vi phân*, một trong những mục tiêu chính là tìm hệ số góc của đường thẳng tiếp tuyến với một đường cong tại một điểm đã cho, tức là đường thẳng này chỉ tiếp xúc với đường cong tại điểm đó mà thôi. Archimedes đã giải bài toán này cho trường hợp đặc biệt là một đường xoắn ốc, và bằng cách đó đã hé lộ công trình trong tương lai của Newton và Leibniz. Ngày nay, lĩnh vực vi tích phân và các nhánh con của nó đã tạo nên nền tảng mà trên đó người ta xây dựng hầu hết các mô hình toán học được sử dụng trong vật lý học, kỹ thuật, kinh tế học, hay động lực học các quần thể.

Archimedes đã làm thay đổi thế giới toán học và mối quan hệ rõ ràng của nó với vũ trụ một cách rất sâu sắc. Bằng việc thể hiện một sự kết hợp đáng kinh ngạc giữa các mối quan tâm lý thuyết và thực tiễn, ông đã cung cấp một bằng chứng kinh nghiệm đầu tiên, chứ không phải thần thoại, cho một thiết kế toán học rõ ràng của tự nhiên. Sự nhận thức xem toán học như là một ngôn ngữ của vũ trụ và do đó cả khái niệm Thượng đế như là một nhà toán học, đã được hình thành trong các tác phẩm của Archimedes. Song, có một điều mà Archimedes đã không làm - đó là ông chưa bao giờ bàn về những hạn chế của các mô hình toán học của ông khi ứng dụng vào các trường hợp thực tế. Chẳng hạn, trong những bàn luận lý thuyết của ông về đòn bẩy, ông đã giả định rằng chúng có độ cứng vô hạn và thanh đòn bẩy không có khối lượng. Như vậy, trong một chừng mực nào đó, ông đã mở ra cánh cửa để cứu sự giải thích có tính biểu kiến của các mô hình toán học. Đây là quan niệm cho rằng các mô hình toán học chỉ có thể biểu diễn những gì được quan sát bởi con người, chứ không phải là mô tả thực tại vật lý thực. Nhà toán học người Hy Lạp Geminus (khoảng 10 trước CN - 6 sau CN) là người đầu tiên bàn luận một cách khá chi tiết về sự khác nhau giữa lập mô hình toán học và những giải thích vật lý có liên quan đến sự chuyển động của các thiên thể. Ông phân biệt giữa các nhà thiên văn (hay toán học), những người mà theo ông chỉ đề xuất các mô hình nhằm *tái tạo* lại những chuyển động quan sát được trên bầu trời, và các nhà vật lý, là những người phải đi tìm *sự lý giải* cho những chuyển động thực. Sự phân biệt cụ thể này đã dẫn tới tình trạng khủng hoảng ghê gớm vào thời của Galileo và dưới đây tôi sẽ còn trở lại vấn đề này.

Có lẽ phần nào đáng ngạc nhiên là bản thân Archimedes lại cho rằng một trong những thành tựu ưa thích nhất của ông lại chính là



Hình 15

việc khám phá ra thể tích của hình cầu nội tiếp trong một hình trụ (H.15) luôn bằng 2/3 thể tích của hình trụ. Ông đã hài lòng với kết quả này đến mức yêu cầu khắc nó trên bia mộ của mình. 137 năm sau cái chết của Archimedes, nhà hùng biện nổi tiếng người La Mã Marcus Tullius Cicero (khoảng 106-43 trước CN) đã phá hiện ra ngôi mộ của nhà toán học vĩ đại. Dưới đây là đoạn mô tả khá cảm động của ông về sự kiện này:

> Khi tôi còn là một quan coi quốc khố ở Sicily, tôi đã thử tìm kiếm mộ của ông ấy [Archimedes]. Người Syracuse không biết gì về nó và thực sự không tin có một thứ như vậy tồn tại. Nhưng nó ở đây, hoàn toàn bị che phủ và ẩn kín dưới những bụi cây gai và mâm xôi. Tôi nhớ đã từng nghe một số câu thơ đơn giản khắc trên bia mộ ông, trong đó có nhắc đến một hình cầu và một hình trụ được làm thành mô hình bằng đá trên mộ ông. Và vì vậy tôi đã tìm rất kỹ tất cả những ngôi mộ nằm bên cạnh Cổng Agrigentine. Cuối cùng, tôi nhìn thấy có một cột nhỏ hơi nhô lên trên bụi cây: phần nhô lên đó là một hình cầu và một hình trụ. Tôi ngay lập tức nói với người dân Syracuse, một vài công dân quan trọng của họ đã ở bên tôi lúc đó, rằng tôi tin đây chính là thứ mà tôi đang tìm kiếm. Một số người mang liềm tới để phát quang toàn bộ khu vực và khi con đường dẫn đến lăng mộ đã thông thoáng, chúng tôi bước thẳng tới đó. Và mấy câu thơ vẫn còn nhìn rõ mặc dù khoảng một nửa mỗi dòng đã bị bào mòn. Vậy là một trong những thành phố nổi tiếng nhất của thế giới Hy

> Lạp, và cũng từng là một trung tâm kiến thức lớn thời xa xưa đó, sẽ vẫn hoàn toàn không biết gì về ngôi mộ của một công dân sáng chói nhất mà nó từng có, nếu như một người đến từ Arpinum (một thị trấn cổ La Mã, ngày nay là Arpino) không đến và phát hiện ra nó!

Cicero đã không quá lời khi mô tả sự vĩ đại của Archimedes. Thực tế, tôi đã rất thận trọng đặt danh xưng "nhà ảo thuật" cao đến mức mà sau vĩ nhân Archimedes, chúng ta phải vượt qua không dưới 18 thế kỷ mới gặp được một người có vị thế tương tự. Không giống như Archimedes, người đã tuyên bố rằng có thể nâng cả Trái đất lên, người khổng lồ này lại khẳng định rằng Trái đất đã thực sự chuyển động.

Học trò giỏi nhất của Archimedes

Galileo Galilei (H.16) sinh ra tại Pisa vào ngày 15 tháng 2 năm 1564. Cha của ông, Vincenzo, là một nhạc sỹ và mẹ ông, bà Giulia Ammannati, là một người ưa hài hước, nếu không muốn nói là một phụ nữ ít thân thiện, không bao giờ dung thứ sự ngu dốt. Năm 1581, Galileo đã theo lời khuyên của cha và ghi danh vào khoa nghệ thuật của trường Đại học Pisa để theo học ngành y. Tuy nhiên, sự thích thú của ông đối với ngành này đã tiêu tan ngay khi ông vào học, để ngả sang toán học. Vì vậy, trong suốt kỳ nghỉ hè năm 1583, Galileo đã nhờ nhà toán học ở Cung đình Tuscan là Ostilio Ricci (1540-1603), đến gặp cha ông để thuyết phục rằng số mệnh của Galileo là phải trở thành một nhà toán học.

Hình 16

Vấn đề này sau đó đã thực sự được thu xếp nhanh chóng - chàng trai trẻ nhiệt tình đã hoàn toàn bị các tác phẩm của Archimedes bỏ bùa mê: “Những người đọc tác phẩm của ông,”, ông viết, “đều nhận thấy rõ ràng là tất cả những bộ óc khác đều tầm thường khi so sánh với Archimedes và hy vọng còn lại thật là nhỏ nhoi để có thể khám phá ra những điều tương tự như ông ấy đã làm”. Vào lúc đó thì Galileo còn chưa biết rằng bản thân ông cũng sở hữu một trong số ít những bộ óc không hề thua kém gì so với bậc thầy người Hy Lạp này. Lấy cảm hứng từ câu chuyện huyền thoại về Archimedes và vòng hoa nguyệt quế của nhà vua, Galileo đã cho xuất bản vào năm 1586 một cuốn sách nhỏ có nhan đề *Chiếc cân nhỏ*, viết về một cái cân thủy tĩnh mà ông sáng chế ra. Sau này, ông còn nhắc đến Archimedes nhiều hơn trong một bài thuyết trình về văn học ở Viện Hàn lâm Florence, trong đó ông đã bàn đến một chủ đề khá khác thường - đó là vị trí và kích thước của địa ngục trong bản trường ca *Inferno* (*Địa ngục*) của Dante.

Năm 1589, Galileo được bổ nhiệm làm giáo sư toán học tại trường Đại học Pisa, một phần là do có sự giới thiệu từ Christopher Clavius (1538-1612), một nhà toán học và thiên văn học đáng kính ở Rome, mà Galileo đã tới thăm vào năm 1587. Ngôi sao của nhà toán học trẻ tuổi lúc này mới thực sự bắt đầu đang lên. Galileo đã dành ba năm tiếp theo để sắp xếp những tư tưởng đầu tiên của ông thành lý thuyết về chuyển động. Những tiểu luận này, rõ ràng là được kích thích bởi những tác phẩm của Archimedes, là một hỗn hợp rất lôi cuốn của nhiều ý tưởng thú vị và cả những khẳng định sai lầm. Chẳng hạn, cùng với sự nhận thức có tính tiên phong rằng người ta có thể kiểm nghiệm các lý thuyết về các vật rơi bằng cách sử dụng một mặt phẳng nghiêng để làm chậm chuyển động lại, Galileo cũng đã phát biểu một cách không chính xác rằng khi các vật được thả rơi từ các ngọn tháp, "gỗ lúc đầu sẽ chuyển động nhanh hơn so với chì". Những thiên hướng và quá trình tư duy nói chung của Galileo trong suốt giai đoạn này của cuộc đời ông phần nào đã bị diễn giải không đúng bởi Vincenzo Viviani (1622-1703) - nhà viết tiểu sử đầu tiên của ông. Viviani đã dựng nên hình ảnh phổ biến về một nhà thực nghiệm cương nghị và tỉ mỉ, người đã có được những hiểu biết riêng, mới mẻ và rất sâu sắc từ những quan sát chi tiết các hiện tượng tự nhiên. Thực ra, cho đến tận năm 1592, khi chuyển tới Padua, thì định hướng và phương pháp luận của Galileo cơ bản thiên về toán học. Ông chủ yếu dựa vào những thí nghiệm tưởng tượng và những mô tả của Archimedes về thế giới thông qua các hình hình học tuân theo các định luật toán học. Phàn nàn chủ yếu của ông về Aristotle vào thời gian đó là ông này "không những không biết gì về những khám phá hình học sâu sắc và khó hiểu mà cả hầu hết những nguyên lý cơ bản của môn khoa học này". Galileo còn cho rằng Aristotle chỉ chủ yếu dựa vào những kinh nghiệm có được từ cảm giác, "vì thoạt nhìn chúng cho ta bóng dáng nào đó của sự thật". Thay vì thế, Galileo đề xuất "phải luôn luôn sử dụng suy luận chứ không phải là các ví dụ (vì chúng ta tìm kiếm nguyên nhân của các kết quả và điều này thì không thể khám phá bằng kinh nghiệm được)".

Cha của Galileo mất vào năm 1591, buộc chàng trai trẻ - lúc này phải chu cấp cho gia đình - phải chấp nhận sự bổ nhiệm ở Padua, nơi ông được trả mức lương cao gấp ba lần. Mười tám năm tiếp sau là những năm tháng hạnh phúc nhất trong cuộc đời Galileo. Ở Padua, ông cũng bắt đầu mối quan hệ lâu dài với Marina Gamba, người mà ông không bao giờ cưới, nhưng lại sinh cho ông ba người con - Virginia, Livia và Vincenzo.

Vào ngày 4 tháng 8 năm 1597, Galileo đã viết một bức thư riêng gửi nhà thiên văn vĩ đại người Đức Johannes Kepler, trong đó ông thú nhận rằng ông đã là người ủng hộ Copernicus "trong một thời gian dài", và nói thêm rằng ông đã thấy ở mô hình nhật tâm của Copernicus một con đường có thể giải thích được rất nhiều các sự kiện của tự nhiên mà không thể lý giải bằng các học thuyết hình học được. Tuy nhiên, ông đã than phiền về thực tế rằng Copernicus "dường như đã bị chế nhạo và la ó". Bức thư này đã đánh dấu sự khoét sâu thêm mối bất đồng giữa Galileo và vũ trụ học của Aristotle. Vật lý thiên văn hiện đại đã bắt đầu định hình.

Thiên sứ

Vào buổi tối ngày 9 tháng 10 năm 1604, các nhà thiên văn ở Verona, Rome và Padua đã giật mình khi phát hiện ra một ngôi sao mới rất nhanh chóng trở nên sáng hơn tất cả các ngôi sao khác trên bầu trời. Nhà khí tượng học Jan Brunowski, một quan chức của triều đình ở Prague, cũng nhìn thấy nó vào tối ngày 10 tháng 10, và trong sự xúc động sâu sắc, ông đã ngay lập tức thông báo cho Kepler. Do bị những đám mây che khuất, nên Kepler đã không quan sát được ngôi sao đó cho đến tận ngày 17 tháng 10, nhưng ngay khi bắt đầu quan sát được, ông đã liên tục ghi chép lại những quan sát của mình trong khoảng thời gian 1 năm và cuối cùng ông đã cho xuất bản một cuốn sách về "ngôi sao mới" này vào năm 1606. Ngày nay, chúng ta biết rằng cảnh tượng trên bầu trời vào năm 1604 không phải đánh dấu sự ra đời của một ngôi sao mới, mà lại chính là cái chết bùng nổ của một ngôi sao cũ. Sự kiện này, ngày nay được gọi là *sao siêu mới Kepler*, đã gây xúc động mạnh ở Padua. Galileo đã cố gắng quan sát ngôi sao mới này bằng mắt thường vào cuối tháng 10 năm 1604, và suốt tháng 12 và tháng 1 sau đó, và ông đã có ba bài thuyết trình trước đông đảo công chúng về chủ đề này. Dựa vào kiến thức chứ không phải mê tín dị đoan, Galileo đã tuyên bố rằng việc không có bất kỳ sự dịch chuyển biểu kiến (*thị sai)* nào về vị trí của ngôi sao mới (đối với nền của những ngôi sao cố định) cho thấy ngôi sao mới này phải ở rất xa vùng Mặt trăng. Ý nghĩa của nhận xét này là vô cùng to lớn. Trong thế giới Aristotle, tất cả những thay đổi trên bầu trời bị hạn chế chỉ ở phía bên này của Mặt trăng, trong khi thiên cầu của các ngôi sao cố định ở xa hơn thì được cho là bất khả xâm phạm và không thể thay đổi.

Thực ra, sự phá vỡ thiên cầu không biến đổi đã bắt đầu vào năm 1572, khi nhà thiên văn người Đan Mạch Tycho Brahe (1546-1601) quan sát được một vụ nổ sao khác mà ngày nay được biết đến dưới cái tên *sao siêu mới Tycho*. Sự kiện năm 1604 đã đóng thêm một cái đinh nữa vào chiếc quan tài của vũ trụ Aristotle. Nhưng sự đột phá thực sự trong sự hiểu biết về vũ trụ lại không phải bắt nguồn từ lãnh địa của những tư biện lý thuyết hay từ những quan sát bằng mắt thường. Mà nó phần nào là kết cục của một thí nghiệm rất đơn giản với hai thấu kính, một lồi (tức thấu kính hội tụ) và một lõm (tức thấu kính phân kỳ) - được đặt cách nhau khoảng 13 insơ và khi đó các vật ở xa nhìn đột nhiên như có vẻ gần lại. Đến năm 1608, các kính thiên văn nhỏ này bắt đầu có mặt ở khắp châu Âu, và một người Hà Lan và hai người làm kính ở Flanders (một vùng phía Bắc của Bỉ) thậm chí còn nộp đơn xin được cấp bằng phát minh sáng chế. Tin đồn về cái dụng cụ kỳ diệu đã đến tai nhà thần học Paolo Sarpi ở Venise, người đã thông báo cho Galileo vào khoảng tháng 5 năm 1609. Lo lắng muốn xác nhận thông tin này, Sarpi cũng đã viết một bức thư cho một người bạn ở Paris, là ông Jacques Badovere, để hỏi xem các tin đồn đó có thật hay không. Theo sự xác nhận của chính ông, thì Galileo "ngay lập tức đã bị thôi thúc bởi mong muốn có được cái dụng cụ tuyệt vời đó". Sau này ông đã mô tả những sự kiện đó trong cuốn *Sứ giả sao*, xuất bản vào tháng 3 năm 1610:

> Khoảng 10 tháng trước, tôi nghe được tin nói rằng một người xứ Flanders đã chế tạo ra một kính thiên văn nhỏ mà nhờ nó những vật nhìn thấy được dù ở rất xa mắt người quan sát nhưng lại thấy rõ ràng như thể chúng ở gần ngay bên vậy. Về tác dụng thực sự đáng chú ý này, có liên quan với một số kinh nghiệm mà một số người rất

> tin trong khi những người khác lại phủ nhận. Một vài ngày sau, tin này đã được xác nhận với tôi trong một bức thư từ một nhà quý tộc Pháp ở Paris, ông Jacques Badovere, điều đó đã khiến bản thân tôi toàn tâm toàn ý để nghiên cứu các phương tiện mà nhờ đó tôi có thể đi đến phát minh ra một dụng cụ tương tự. Và chẳng bao lâu sau đó, tôi đã làm được, khi dựa vào lý thuyết khúc xạ.

Galileo ở đây đã chứng tỏ cùng một kiểu tư duy thực tiễn đầy tính sáng tạo vốn đặc trưng cho Archimedes - một khi ông đã biết rằng kính viễn vọng có thể được chế tạo, ông sẽ không mất nhiều thời gian để hình dung ra chính ông sẽ chế tạo nó như thế nào. Hơn nữa, vào khoảng thời gian giữa tháng 8 năm 1609 và tháng 3 năm 1610, Galileo đã sử dụng tài sáng tạo của mình để hoàn thiện kính viễn vọng của mình từ chỗ chỉ là một dụng cụ đưa các vật lại gần 8 lần thành một thiết bị có độ phóng đại lớn gấp 20 lần. Bản thân điều đó đã là một chiến công đáng kể về mặt kỹ thuật, song sự vĩ đại của Galileo không phải phát lộ ở những bí quyết thực hành mà là ở cái cách ông sử dụng chiếc ống làm tăng tầm nhìn đó của mình (cái ống mà ông gọi là *perspicillum* - tiếng La tinh có nghĩa là *kính*). Thay vì do thám các tàu ở ngoài xa đến từ cảng Venice, hay các nóc nhà ở Padua, Galileo đã hướng kính viễn vọng của mình lên bầu trời. Điều tiếp theo là một điều chưa từng có trong lịch sử khoa học. Như nhà lịch sử khoa học Noel Swerdlow đã viết "Trong khoảng 2 tháng, tháng 12 và tháng 1 [năm 1609 và 1610 tương ứng], ông đã có nhiều phát minh làm thay đổi thế giới hơn bất kỳ ai đã từng làm trước đó." Thực tế, năm 2009 đã được gọi là Năm quốc tế về thiên văn học để đánh dấu kỷ niệm 400 năm những quan sát đầu tiên của Galileo. Vậy Galileo thực sự đã làm được gì để trở thành một vị anh hùng khoa học ấn tượng đến như vậy? Dưới đây chỉ là một vài thành quả đáng kinh ngạc của ông với kính viễn vọng. Hướng kính viễn vọng của mình tới Mặt trăng và đặc biệt nghiên cứu đường phân cách giữa vùng tối và vùng được chiếu sáng của nó, Galileo đã phát hiện ra rằng thiên thể này có bề mặt gồ ghề, với những ngọn núi, các hố hình miệng núi lửa, và những vùng đồng bằng rộng lớn. Ông cũng đã quan sát những điểm sáng xuất hiện như thế nào ở vùng bị bao phủ bởi bóng tối, và những sáng điểm này rộng dần và loang ra tựa như ánh sáng Mặt trời đang mọc phủ lên những đỉnh núi như thế nào. Ông thậm chí còn sử dụng hình học chiếu sáng để xác định chiều cao của một ngọn núi, hóa ra lên đến hơn 4 dặm. Nhưng đấy chưa phải là tất cả. Galileo đã thấy rằng phần tối của Mặt trăng (ở pha trăng khuyết) cũng có phát sáng một cách yếu ớt, và ông kết luận rằng đó là do ánh sáng Mặt trời phản xạ từ Trái đất. Cũng như Trái đất được chiếu sáng bởi trăng rằm, Galileo khẳng định, bề mặt Mặt trăng cũng được tắm bởi ánh sáng phản xạ từ Trái đất.

Trong khi một số trong các phát minh này không phải hoàn toàn là mới song sức mạnh của những bằng chứng của Galileo đã nâng lý lẽ lên một cấp độ hoàn toàn mới. Cho đến thời đại của Galileo, có một sự phân biệt rạch ròi giữa đất và trời, hạ giới và thiên đường. Sự khác biệt này không chỉ về mặt khoa học hay triết học. Một tấm thảm lộng lẫy của huyền thoại, tôn giáo, thơ ca lãng mạn và cảm thụ thẩm mỹ đã được thêu dệt nên xung quanh sự khác biệt giữa trời và đất. Nhưng giờ Galileo lại nói đến điều được xem là hoàn toàn không thể tưởng tượng được. Ngược với lý thuyết của Aristotle, Galileo đã đặt Trái đất và một thiên thể

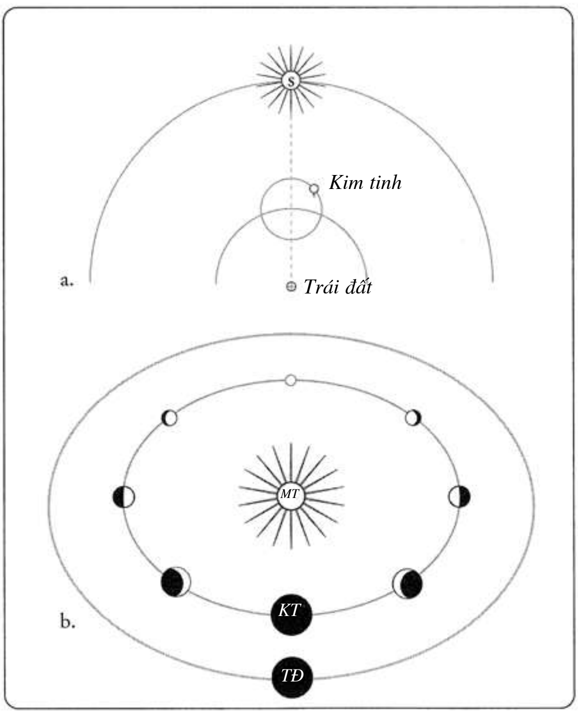
(Mặt trăng) trong một mối quan hệ rất bình đẳng - cả hai đều có bề mặt rắn, gồ ghề, và cả hai đều phản xạ ánh sáng từ Mặt trời.

Còn đi xa hơn Mặt trăng, Galileo đã bắt đầu quan sát cả các hành tinh (*planet*)- cái tên được những người Hy Lạp dành cho "những kẻ lang thang" trên bầu trời đêm. Hướng kính viễn vọng của mình đến Mộc tinh vào ngày 7 tháng 1 năm 1610, ông đã kinh ngạc nhận ra ba ngôi sao mới nằm thẳng hàng cắt ngang qua hành tinh này, trong đó hai ngôi sao ở phía đông và một ở phía tây. Những ngôi sao mới này dường như thay đổi vị trí của chúng so với Mộc tinh vào những đêm tiếp sau. Vào ngày 13 tháng 1, ông lại thấy một ngôi sao thứ tư. Trong vòng một tuần kể từ khám phá đầu tiên, Galileo đã đi đến một kết luận thật bất ngờ - những ngôi sao mới này thực ra là vệ tinh quay xung quanh Mộc tinh, giống như Mặt trăng quay xung quanh Trái đất vậy.

Một trong những đặc trưng nổi bật của những cá nhân có ảnh hưởng quan trọng đối với lịch sử khoa học - đó là khả năng thấu hiểu ngay lập tức khám phá nào thực sự làm nên sự khác biệt. Một đặc điểm khác của nhiều nhà khoa học có ảnh hưởng là khả năng biến các khám phá trở nên có thể hiểu được với những người khác. Galileo là một bậc thầy trong cả hai lĩnh vực này. Lo ngại rằng có thể có ai đó khác cũng khám phá ra các vệ tinh của Mộc tinh, Galileo đã nhanh chóng công bố kết quả của mình và đến mùa xuân năm 1610, chuyên luận của ông có tên là *Sidereus Nuncius (Sứ giả sao)* đã xuất hiện ở Venice. Vào thời điểm đó trong cuộc đời, Galileo rất nhạy bén về chính trị, ông đã dành tặng cuốn sách này cho đại công tước Tuscany là Cosimo II de Medici, và ông đã đặt tên cho các vệ tinh này là "Các ngôi sao nhà Medici". Sau hai năm lao động như khổ sai, Galileo đã xác định được chu kỳ của quỹ đạo - tức thời gian mà mỗi trong bốn vệ tinh này quay trọn một vòng xung quanh Mộc tinh - với sai số chỉ khoảng vài phút. *Sứ giả sao* chốc lát đã trở thành cuốn sách bán chạy nhất - năm trăm bản đầu tiên đã nhanh chóng bán hết - khiến Galileo nổi tiếng khắp châu lục.

Tầm quan trọng của việc khám phá ra các vệ tinh của Mộc tinh hoàn toàn không phải là nói quá lên. Đây không chỉ là những thiên thể đầu tiên được bổ sung vào hệ Mặt trời kể từ những khám phá của người Hy Lạp cổ đại, mà sự tồn tại của chúng còn xóa bỏ được một trong những chống đối nghiêm trọng nhất đối với học thuyết Copernicus. Những người theo trường phái Aristotle đã cãi lại rằng Trái đất không thể quay xung quanh Mặt trời, vì bản thân Trái đất đã có Mặt trăng quay xung quanh nó rồi. Làm sao mà vũ trụ lại có thể có hai tâm quay riêng rẽ, là Mặt trời và Trái đất? Khám phá của Galileo đã chứng minh một cách rõ ràng rằng một hành tinh có thể có các vệ tinh quay xung quanh nó trong khi bản thân hành tinh đó lại đi theo hành trình của riêng nó xung quanh Mặt trời.

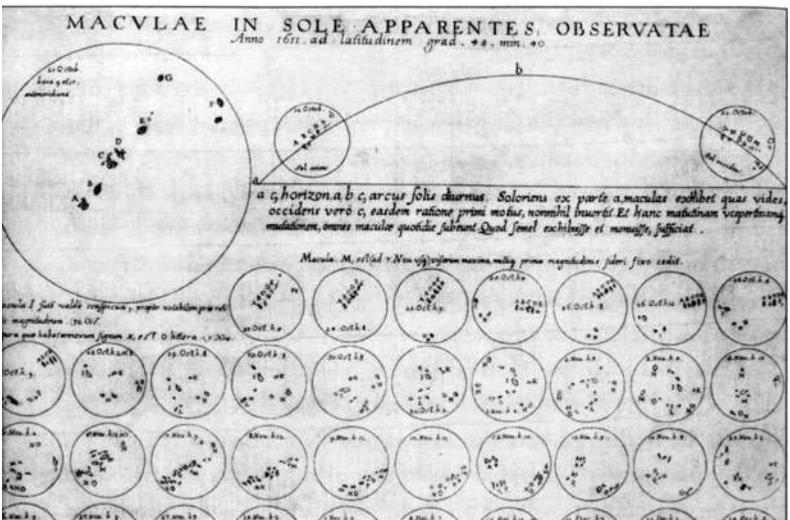
Một khám phá quan trọng khác mà Galileo đã thực hiện vào năm 1610, đó là các pha của Kim tinh. Trong thuyết địa tâm, Kim tinh được cho là di chuyển theo một vòng tròn nhỏ (một *ngoại luân)* chồng lên quỹ đạo của nó xung quanh Trái đất. Tâm của ngoại luân này được cho là luôn nằm trên đường nối giữa Trái đất và Mặt trời (như H. 17a; không vẽ theo tỷ lệ). Trong trường hợp này, khi được quan sát từ Trái đất, người ta sẽ thấy Kim tinh luôn xuất hiện dưới dạng lưỡi liềm với bề rộng hơi thay đổi. Trái lại, trong hệ thống Copernicus, hình dạng của Kim tinh thay đổi từ một đĩa sáng nhỏ, khi hành tinh này ở phía bên kia của Mặt trời (khi nhìn từ Trái đất), thành một chiếc đĩa lớn hầu như tối đen khi Kim tinh ở cùng một phía với Trái đất (H. 17b). Giữa hai vị trí đó, Kim tinh đi qua toàn bộ chuỗi các pha tương tự như Mặt trăng. Galileo đã trao đổi về sự khác biệt quan trọng này giữa các tiên đoán của hai học thuyết với một cựu sinh viên của mình là Benedetto Castelli (1578-1643), và ông đã tiến hành những quan sát quan trọng vào khoảng thời gian giữa tháng 10 và tháng 12 năm 1610. Phán quyết là hoàn toàn rõ ràng. Những quan sát đã khẳng định một cách thuyết phục tiên đoán của học thuyết Copernicus,



Hình 17

và do đó đã chứng minh được rằng Kim tinh thực sự quay xung quanh Mặt trời. Vào ngày 11 tháng 12, Galileo đã tinh nghịch gửi cho Kepler một câu sử dụng phép đảo chữ cái rất khó hiểu "*Haec immatura a me iam frusta leguntur oy*" ("Điều này đã được tôi thử quá sớm một cách vô ích"). Kepler đã thử giải mã lá thư bí ẩn này nhưng không thành công và cuối cùng đã bỏ cuộc. Trong bức thư tiếp theo vào ngày 1 tháng 1 năm 1611, Galileo cuối cùng đã đảo lại các chữ cái trong bức thư trước để đọc thành "*Cynthia figuras aemulatur mater amorum*" ("Mẹ đẻ của tình yêu [tức Venus - Kim tinh] ganh đua về hình dáng với Cynthia [Mặt trăng]").

Tất cả những khám phá mà tôi mô tả cho đến nay đều liên quan hoặc đến các hành tinh trong hệ Mặt trời - những thiên thể quay xung quanh Mặt trời và phản xạ ánh sáng của nó - hoặc là những vệ tinh quay quanh các hành tinh này. Galileo cũng có hai khám phá quan trọng khác liên quan đến các sao - những thiên thể mà tự chúng phát sáng, như Mặt trời, chẳng hạn. Trước hết, ông đã tiến hành quan sát chính Mặt trời. Trong quan niệm về thế giới của trường phái Aristotle, Mặt trời được cho là biểu tượng của sự hoàn hảo và bất biến vốn thuộc về thế giới bên kia. Hãy hình dung cú sốc gây ra bởi sự phát hiện thấy rằng bề mặt của Mặt trời còn xa mới là hoàn hảo. Nó có các khuyết tật và những vết tối xuất hiện rồi biến mất khi Mặt trời quay xung quanh trục của nó. Hình 18 cho thấy hình vẽ bằng tay các vết Mặt trời của Galileo mà một đồng nghiệp của ông là Federico Cesi (1585-1630) đã viết rằng chúng "tạo nên sự thích thú bởi cả sự kỳ diệu về quang cảnh lẫn sự chính xác của diễn tả". Thực ra thì Galileo không phải là người đầu tiên nhìn thấy các vết Mặt trời và cũng không phải là người đầu tiên viết về chúng. Đặc biệt, một cuốn sách nhỏ nhan đề *Ba bức thư về vết Mặt trời* được viết bởi một nhà khoa học đồng thời là một linh mục dòng Tên là Christopher Scheiner (1573-1650) đã khiến Galileo khó chịu đến mức khiến ông cảm thấy buộc phải công bố một câu trả lời thật rõ ràng. Scheiner lập luận rằng không thể có các vết ngay trên bề mặt của Mặt trời. Tuyên bố của ông ta một phần dựa trên thực tế là các vết này, theo ông ta, là quá tối (ông ta cho rằng chúng tối hơn cả các vùng tối trên Mặt trăng) và một phần dựa vào thực tế là chúng dường như không luôn luôn quay trở lại vị trí cũ. Bởi vậy Scheiner tin rằng chúng chính là những hành tinh nhỏ quay xung quanh Mặt trời. Trong cuốn *Lịch sử và những minh chứng có liên quan đến vết Mặt trời* của mình, Galileo



Hình 18

đã bẻ gãy một cách hệ thống từng lập luận một của Scheiner. Với một sự tỉ mỉ, sắc sảo và châm biếm, mà có thể khiến Oscar Wilde phải nhảy cẫng lên để tung hô, Galileo đã chứng minh rằng các vết thực tế là hoàn toàn không tối, và nó chỉ tối khi so sánh với bề mặt sáng chói của Mặt trời mà thôi. Thêm vào đó, tác phẩm của Galileo không để lại một chút nghi ngờ nào rằng các vết này ở ngay trên bề mặt của Mặt trời (tôi sẽ trở lại sự chứng minh về sự thật này của Galileo ở phần sau của chương này).

Những quan sát của Galileo về các sao khác thực sự là một việc làm liều lĩnh đầu tiên của con người vào vũ trụ nằm bên ngoài hệ Mặt trời của chúng ta. Không giống như kinh nghiệm của ông về Mặt trăng và các hành tinh, Galileo đã khám phá ra rằng kính viễn vọng của ông không phóng lớn được hình ảnh của các ngôi sao chút nào. Ngụ ý ở đây là rất rõ ràng - các ngôi sao còn ở xa hơn cả các hành tinh. Bản thân điều này thực sự là đáng kinh ngạc - song điều thực sự gây sửng sốt chính là *số lượng* các ngôi sao mới, mờ nhạt mà kính viễn vọng đã phát hiện ra. Chỉ trong một vùng nhỏ quanh chòm sao Thợ Săn (*Orion*), Galileo đã khám phá ra không dưới 500 ngôi sao mới. Khi Galileo xoay kính viễn vọng của mình ngang qua dải Ngân Hà - một vệt sáng mờ vắt ngang qua bầu trời đêm - ông còn thực sự kinh ngạc hơn nữa. Ngay cả dải sáng trông có vẻ trơn tru đó lại vỡ ra thành vô số các ngôi sao mà chưa ai từng được nhìn thấy trước đây. Vũ trụ đột nhiên trở nên to lớn hơn. Bằng những ngôn từ phần nào bình thản của một nhà khoa học, Galileo đã thông báo:

> Điều thứ ba mà chúng tôi quan sát được chính là bản chất của vật chất trong dải Ngân Hà, mà với sự hỗ trợ của

> kính viễn vọng, nó có thể được quan sát tốt tới mức tất cả những tranh cãi làm các nhà triết học phải bất bình trong nhiều thế hệ đã được xóa sạch bởi điều chắc chắn có thể nhìn thấy được, và nhờ thế, chúng ta đã được giải phóng khỏi những cuộc tranh cãi trên toàn thế giới. Đối với dải Ngân Hà thì không có gì khác ngoài một tập hợp vô số các ngôi sao được phân bố thành các đám. Và với bất kỳ vùng nào của bầu trời mà bạn hướng kính viễn vọng của mình tới, thì bạn cũng ngay lập tức quan sát thấy một số lượng khổng lồ các ngôi sao ở đó. Trong số đó có rất nhiều ngôi sao dường như khá lớn và rất rõ ràng, song vô số các ngôi sao nhỏ thì thực sự là không thể dò được hết.

Một vài người cùng thời với Galileo đã phản ứng một cách hứng khởi. Khám phá của ông đã kích thích trí tưởng tượng của các nhà khoa học và cả phi khoa học gần như trên khắp châu Âu. Một nhà thơ người Scotland là Thomas Seggett đã ca ngợi:

> *Columbus đưa đến cho con người những vùng đất*
> *để chinh phục bằng máu đổ*
> *Galileo mang đến cho chúng ta những thế giới mới chẳng*
> *tổn hại đến ai.*
> *Điều gì tốt đẹp hơn?*

Ngài Henry Wotton, một nhà ngoại giao Anh ở Venice, đã cố gắng có được một bản cuốn *Sứ giả sao* vào ngày cuốn sách ra mắt. Ông ngay lập tức đã gửi nó đến Vua James I của nước Anh kèm theo một bức thư trong đó có đoạn sau:

> Tôi gửi kèm theo đây tới Bệ hạ một mẩu tin kỳ lạ nhất (vì tôi chỉ có thể gọi như vậy) mà Ngài chưa từng bao giờ nhận được từ chỗ của tôi; đó là một cuốn sách (đang truyền đi khắp nơi đúng ngày hôm nay) của một giáo sư toán học ở Padua, người mà nhờ sự trợ giúp của một dụng cụ quang học... đã khám phá ra bốn hành tinh mới quay xung quanh Mộc tinh, ngoài ra còn có rất nhiều những ngôi sao cố định còn chưa được biết khác.

Nhiều tập sách có thể đã được viết (mà thực sự là đã được viết) về tất cả những thành tựu của Galileo, nhưng những điều này nằm ngoài phạm vi của cuốn sách này. Ở đây, tôi chỉ muốn khảo sát tác dụng của một số khám phá sửng sốt này đến quan điểm về vũ trụ của Galileo. Đặc biệt là ông đã nhận thức được mối quan hệ nào, nếu có giữa toán học và vũ trụ rộng lớn đầy bí ẩn?

Cuốn sách vĩ đại của tự nhiên

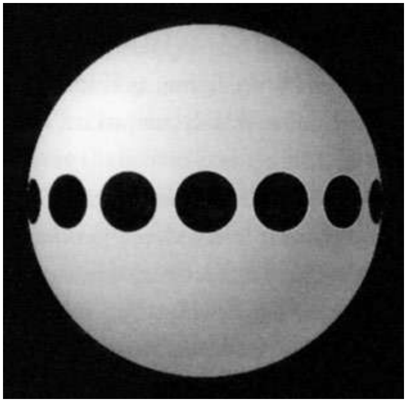
Nhà triết học khoa học Alexandre Koyré (1892-1964) từng nhận xét rằng cuộc cách mạng trong tư duy khoa học của Galileo có thể được chưng cất ra một yếu tố cơ bản: đó là khám phá ra rằng toán học là ngữ pháp của khoa học. Trong khi những người thuộc trường phái Aristotle hài lòng với sự mô tả định tính về tự nhiên, và để làm điều đó họ thậm chí còn viện đến uy tín của Aristotle, thì Galileo lại khẩn thiết thúc giục các nhà khoa học nên lắng nghe tự nhiên và chìa khóa để giải mã tiếng nói của vũ trụ là những quan hệ toán học và mô hình hình học. Sự khác biệt hoàn toàn giữa hai cách tiếp cận được minh họa bởi những bài viết của các thành viên xuất chúng của hai nhóm. Và đây là ý kiến của Giorgio Coresio thuộc trường phái Aristotle: "Vì vậy, chúng tôi kết luận rằng ông ta, cái người không muốn làm việc trong bóng tối ấy phải tham vấn Aristotle, người phiên dịch tuyệt vời của tự nhiên". Một môn đệ khác của Aristotle khác, triết gia Vincenzo di Grazia ở Pisa, còn nói thêm:

> Trước khi chúng ta xem xét đến những chứng minh của Galileo, dường như cần phải chứng minh họ còn ở cách chân lý bao xa, những người muốn chứng minh những sự thật tự nhiên bằng suy luận toán học mà trong số đó, nếu tôi không lầm, có Galileo. Tất cả các khoa học và nghệ thuật đều có những nguyên lý riêng và mục đích riêng, nhờ đó chúng chứng minh được những tính chất đặc biệt của đối tượng nghiên cứu của chúng. *Từ đó suy ra chúng ta không được phép sử dụng những nguyên lý của một khoa học này để chứng minh các tính chất của một khoa học khác* [nhấn mạnh của tác giả]. Do đó, bất kỳ ai nghĩ rằng anh ta có thể chứng minh các tính chất của tự nhiên bằng lập luận toán học thì quả là loạn trí, bởi hai thứ khoa học này là rất khác nhau. Nhà khoa học tự nhiên nghiên cứu những vật thể tự nhiên có chuyển động là trạng thái tự nhiên và hợp lý của chúng, nhưng các nhà toán học lại tách khỏi toàn bộ chuyển động ấy.

Ý tưởng về sự phân vùng khép kín các lĩnh vực khác nhau của khoa học này chính là kiểu quan niệm đã khiến Galileo rất bực tức. Trong bản thảo chuyên luận của ông về thủy tĩnh học, *Bàn về các vật thể nổi*, ông đã giới thiệu toán học như là một phương tiện đầy sức mạnh có thể giúp cho con người thực sự vén lên bức màn bí mật của tự nhiên:

> Tôi mong đợi một sự quở trách tồi tệ từ một trong những đối thủ của mình, và tôi gần như có thể nghe thấy tiếng anh ta la hét trong tai tôi rằng xử lý các vấn đề theo cách tự nhiên là một chuyện và làm điều đó theo cách toán học là chuyện hoàn toàn khác, và các nhà hình học hãy nên trung thành với trí tưởng tượng của mình, đừng nên can dự vào những vấn đề triết học nơi mà các kết luận hoàn toàn khác với các kết luận trong toán học. Nếu như thế thì chân lý không chỉ có một mà là hơn một; và hình học vào thời đại chúng ta lại là một chướng ngại vật đối với việc đạt được triết học thực thụ; và như thế có nghĩa là không thể là một nhà hình học và triết học cùng lúc, nên chúng ta phải suy ra một hệ quả tất yếu là bất kỳ ai biết hình học thì không thể biết vật lý học, và không thể bàn luận và xử lý những vấn đề thuộc về vật lý một cách triết học! Kết quả thật ngu ngốc chẳng kém gì chuyện một bác sĩ nọ, quá xúc động bởi cơn đau lá lách, đã nói rằng vị bác sĩ vĩ đại ở Acquapendente [ý muốn nói tới nhà giải phẫu người Ý Hieronymus Fabricius (1537-1619) ở Acquapendente], rất nổi tiếng về giải phẫu và phẫu thuật, nên tự hài lòng với con dao mổ và thuốc mỡ chứ đừng thử chữa trị bằng thuốc làm gì, vì kiến thức về phẫu thuật thì đối lập với thuốc và phá hủy nó.

Một ví dụ đơn giản về chuyện những thái độ khác nhau đó đối với các khám phá do quan sát có thể làm thay đổi hoàn toàn sự giải thích về các hiện tượng tự nhiên như thế nào - đó là khám phá ra các vết Mặt trời. Như tôi đã trình bày ở trên, nhà thiên văn kiêm tu sĩ dòng Tên Christopher Scheiner đã quan sát những vết này một cách thành thạo và kỹ lưỡng. Tuy nhiên, ông đã sai lầm khi để cho những định kiến của trường phái Aristotle về một bầu trời hoàn hảo đã nhuộm màu những suy xét của ông. Chính vì vậy, khi phát hiện ra rằng các vết này không quay trở lại vị trí và trật tự cũ, ông đã nhanh chóng tuyên bố rằng ông có thể "giải thoát Mặt trời khỏi những vết nhơ đó". Tiền đề về tính bất biến của bầu trời đã hạn chế trí tưởng tượng của ông và ngăn cản ông xem xét khả năng những vết này có thể thay đổi, thậm chí nằm ngoài sự nhận biết. Chính vì vậy, ông kết luận rằng các vết đó *phải* là các hành tinh quay xung quanh Mặt trời. Đường lối tiếp cận của Galileo đối với vấn đề về khoảng cách giữa các vết và bề mặt của Mặt trời là hoàn toàn khác. Ông nhận thấy có ba quan sát cần phải giải thích: một là các vết có vẻ như mảnh hơn khi chúng ở gần mép của đĩa Mặt trời so với khi chúng ở vùng trung tâm của đĩa. Thứ hai, khoảng cách giữa các vết dường như tăng lên khi chúng tiến gần đến trung tâm của đĩa. Và cuối cùng, các vết dường như di chuyển nhanh hơn khi ở gần trung tâm so với khi ở bên rìa đĩa. Chỉ bằng một phép dựng hình, Galileo đã chứng tỏ được rằng giả thuyết cho rằng các vết nằm ngay trên bề mặt Mặt trời và được mang đi vòng quanh cùng với nó là phù hợp với tất cả các thực tế quan sát được. Giải thích chi tiết của ông dựa trên hiện tượng thị giác gọi là sự *co ngắn lại* trên mặt cầu, cụ thể là



Hình 19

các hình dạng dường như mảnh hơn và xích gần lại với nhau hơn khi ở bên rìa (H.19 minh họa hiệu ứng này đối với các đường tròn vẽ trên một mặt cầu).

Tầm quan trọng của phép chứng minh của Galileo đối với nền tảng của tiến trình khoa học là rất to lớn. Ông đã chứng tỏ rằng các dữ liệu quan sát trở thành những mô tả có ý nghĩa của thực tại chỉ khi được nhúng vào một lý thuyết toán học thích hợp. Vẫn những quan sát đó có thể dẫn tới những cách giải thích mơ hồ trừ phi được hiểu trong một phạm vi lý thuyết rộng lớn hơn.

Galileo không bao giờ từ bỏ cơ hội để có một cuộc chiến tốt. Sự trình bày khúc chiết nhất những tư tưởng của ông về bản chất của toán học và vai trò của nó trong khoa học là ở một ấn phẩm bút chiến khác - *Người thử nghiệm*. Chuyên luận được viết một cách tài ba, lỗi lạc này đã trở nên nổi tiếng đến mức Giáo hoàng Urban VIII đã bảo tiểu đồng đọc cho ông nghe trong các bữa ăn. Khá kỳ lạ là luận điểm chính của Galileo trong *Người thử nghiệm* rõ ràng là sai. Ông đã cố gắng biện luận rằng sao chổi thực sự là những hiện tượng gây nên bởi một số trùng hợp ngẫu nhiên của sự khúc xạ quang học ở phía bên này của Mặt trăng.

Toàn bộ câu chuyện về *Người thử nghiệm* nghe như thể phần nào được lấy từ lời của một vở nhạc kịch Ý. Vào mùa thu năm 1618, ba sao chổi xuất hiện liên tiếp nhau. Đặc biệt là sao chổi thứ ba có thể nhìn thấy trong suốt gần ba tháng. Vào năm 1619, Horatio Grassi, một nhà toán học đến từ trường Collegio Romano thuộc dòng Tên, đã xuất bản nặc danh một cuốn sách nhỏ về những quan sát của ông đối với ba sao chổi này. Theo bước chân của nhà thiên văn Đan Mạch vĩ đại Tycho Brahe, Grassi đã kết luận rằng các sao chổi này nằm ở đâu đó giữa Mặt trăng và Mặt trời. Cuốn sách này lẽ ra rồi sẽ rơi vào quên lãng, chẳng ai chú ý tới, nhưng Galileo đã quyết định phản hồi, khi nghe nói rằng một tu sĩ dòng Tên nào đó đã mượn ấn phẩm của Grassi như một đòn đánh vào học thuyết Copernicus. Lời đáp lại của Galileo dưới dạng những bài thuyết trình (phần lớn do chính Galileo viết) được môn đệ của ông là Mario Guiducci gửi đi. Trong phiên bản được xuất bản của những bài giảng này, mang tên *Bàn về Sao chổi*, Galileo đã tấn công trực diện Grassi và Tycho Brahe. Rồi đến lượt Grassi phản công. Dưới bút danh là Lothario Sarsi, và giả làm một trong các học trò của chính mình, Grassi đã công bố một lời đáp trả rất gay gắt, chỉ trích Galileo bằng những ngôn từ không khoan nhượng (bài đáp lại này có nhan đề *Bản cân đối thiên văn và triết học, trong đó đánh giá các quan điểm của Galileo Galilei liên quan đến các sao chổi cũng như những quan điểm của Mario Guiduccio đã được trình bày tại Viện Hàn lâm Florentine*). Trong khi bảo vệ việc ứng dụng các phương pháp của Tycho để xác định khoảng cách, Grassi (nói như thể ông là sinh viên của mình) đã lập luận:

> Cứ cho là thày tôi theo Tycho đi. Như thế là một tội ác hay sao? Vậy chứ ông ấy nên theo ai? Ptolemy chăng [Người Alexandre khởi xướng hệ thống địa tâm]? Người mà cổ họng của những người đi theo luôn bị đe dọa bởi thanh kiếm giơ ra của Thần chiến tranh mà giờ còn trở nên sát gần hơn. Hay là Copernicus? Nhưng ông ấy, một người ngoan đạo, thà kêu gọi mọi người rời bỏ ông ấy và chối bỏ giả thuyết của ông vừa mới bị lên án gần đây còn hơn. Chính vì vậy, Tycho chính là người duy nhất mà chúng ta có thể thừa nhận làm người dẫn dắt chúng ta trong hành trình chưa biết của các vì sao.

Những lời lẽ này minh chứng một cách đẹp đẽ về con đường tốt đẹp mà các nhà toán học dòng Tên phải bước đi theo vào đầu thế kỷ 17. Một mặt, sự chỉ trích của Grassi về Galileo là hoàn toàn hợp lý và sâu sắc một cách thấu đáo. Mặt khác, do bị bắt buộc không được dính líu đến học thuyết Copernicus, Grassi đã phải tự trói tay trói chân của mình, và điều này đã làm yếu đi toàn bộ lập luận của ông.

Bạn bè của Galileo đã rất lo lắng rằng sự tấn công của Grassi có thể sẽ làm phương hại tới uy tín của Galileo nên đã hối thúc ông đáp trả. Điều này dẫn đến việc xuất bản cuốn *Người thử nghiệm* vào năm 1623 (cái nhan đề đầy đủ giải thích rằng trong tài liệu này "các nội dung của *Bản cân đối thiên văn và triết học* của Lothario Sarsi ở Siguenza đã được cân bởi một cái cân tốt và chính xác").

Như tôi đã trình bày ở trên, *Người thử nghiệm* chứa những tuyên bố mạnh mẽ nhất và rõ ràng nhất của Galileo có liên quan đến mối quan hệ giữa toán học và vũ trụ. Dưới đây là đoạn đáng lưu ý:

> Tôi tin là Sarsi đã được thuyết phục một cách chắc chắn rằng, trong triết học, điều căn bản là phải hỗ trợ mình bằng ý kiến của một tác giả nổi tiếng nào đó, cứ như thể khi mà trí não của chúng ta không được kết hợp với lý lẽ của người khác, thì chúng sẽ phải hoàn toàn cằn cỗi và vô sinh vậy. Có lẽ ông nghĩ rằng triết học là một cuốn sách hư cấu được một người nào đó sáng tạo ra, như *Iliad* hay *Orlando Furioso* [một bản anh hùng ca thế kỷ 17 của Ludovico Ariosto] - những cuốn sách mà trong đó điều ít quan trọng nhất là: cái được viết ở đó có là đúng hay không. Nhưng thưa ngài Sarsi, thực tế lại không phải như vậy. *Triết học được viết trong cuốn sách vĩ đại nằm ngay trước mắt chúng ta (ý tôi là vũ trụ) nhưng chúng ta sẽ không thể hiểu được nó nếu trước tiên ta không học ngôn ngữ và nắm bắt những chữ mà theo đó nó được viết ra. Nó được viết bằng ngôn ngữ toán học, với các chữ là những hình tam giác, hình tròn và các hình hình học khác mà nếu thiếu chúng con người không thể lĩnh hội được một từ nào của cuốn sách đó, và nếu thiếu chúng, người ta sẽ lang thang vô vọng qua một mê cung tăm tối.* [nhấn mạnh của tác giả].

Thật không thể tin được, phải không? Biết bao thế kỷ đã trôi qua trước khi câu hỏi tại sao toán học lại hiệu quả đến như vậy trong việc giải thích tự nhiên được đặt ra, và Galileo đã nghĩ rằng ông đã thực sự biết câu trả lời! Với ông, toán học đơn giản là ngôn ngữ của vũ trụ. Để hiểu vũ trụ, ông cho rằng, người ta phải nói được ngôn ngữ này. Và Chúa thực sự là một nhà toán học.

Phạm vi đầy đủ các ý tưởng trong các tác phẩm của Galileo vẽ nên một bức tranh thậm chí còn chi tiết hơn quan điểm của ông về toán học. Trước tiên, chúng ta phải nhận thấy rằng đối với Galileo, toán học xét cho cùng nghĩa là hình học. Hiếm khi ông quan tâm đến việc đo các giá trị bằng các con số tuyệt đối. Ông mô tả các hiện tượng chủ yếu nhờ các tỷ lệ giữa các đại lượng và bằng các thuật ngữ tương đối. Một lần nữa, Galileo thực sự là một môn đệ của Archimedes, người mà các nguyên lý về đòn bẩy và phương pháp hình học so sánh được ông sử dụng hiệu quả và rộng rãi. Điểm thú vị thứ hai, được tiết lộ một cách đặc biệt trong cuốn sách cuối cùng của Galileo, đó là sự khác biệt mà ông nêu ra giữa vai trò của hình học và lôgic. Bản thân cuốn sách, *Bàn về các chứng minh toán học liên quan đến hai khoa học mới*, được viết dưới dạng đối thoại sinh động giữa ba người, Salviati, Sagredo, và Simplicio, với sự phân vai hoàn toàn rõ ràng. Salviati là người phát ngôn thực sự của Galileo. Sagredo, một người yêu triết học quý phái, là người có trí óc thực sự thoát khỏi những ảo tưởng của lẽ phải thông thường theo Aristotle và vì vậy có thể thuyết phục được anh ta bằng sức mạnh của môn khoa học mới - đó là toán học. Simplicio, người mà trong tác phẩm trước của Galileo được phác họa là bị bỏ bùa mê bởi uy tín của trường phái Aristotle, xuất hiện ở đây như là một học giả có đầu óc cởi mở, sẵn sàng tiếp thu cái mới. Vào ngày tranh luận thứ hai, Sagredo có một cuộc trao đổi rất thú vị với Simplicio:

> *Sagredo*: Chúng ta sẽ nói gì đây, Simplicio? Liệu chúng ta có cần không thú nhận rằng sức mạnh của hình học là một công cụ tiềm tàng nhất mài sắc trí tuệ và sử dụng nó để tư biện và suy luận một cách hoàn hảo hay không? Lẽ

nào Plato không có lý do chính đáng khi muốn các học trò của mình trước hết phải có một cơ sở toán học đấy sao?

Simplicio có vẻ như đồng ý và ông đưa ra sự so sánh với lôgic:

Simplicio: Thực sự thì tôi bắt đầu hiểu rằng mặc dù lôgic là một công cụ rất tuyệt vời để dẫn dắt sự suy luận của chúng ta, song nó không thể so sánh được với sự sắc bén của hình học trong việc đánh thức trí tuệ để khám phá.

Sagredo liền làm sâu sắc thêm sự khác biệt:

Sagredo: Với tôi thì dường như lôgic dạy chúng ta cách làm thế nào để biết liệu suy luận và những chứng minh đã được khám phá ra có phải là xác quyết hay chưa, nhưng tôi không tin rằng nó lại dạy chúng ta cách để tìm ra những suy luận và chứng minh xác quyết.

Thông điệp của Galileo ở đây rất đơn giản - ông tin rằng hình học là công cụ mà nhờ đó những chân lý mới sẽ được *khám phá* ra. Mặt khác, lôgic đối với ông chỉ là phương tiện mà nhờ đó các khám phá đã thực hiện được *đánh giá và phê phán*. Trong chương 7, chúng ta sẽ xem xét một quan điểm khác, mà theo đó toàn bộ toán học bắt nguồn từ lôgic.

Vậy làm thế nào mà Galileo đi đến ý tưởng rằng toán học là ngôn ngữ của tự nhiên? Xét cho cùng thì, một kết luận mang tính triết học trọng đại này không thể đột nhiên hiện ra từ không khí được. Thực sự thì cội nguồn của quan niệm này đã nằm trong các tác phẩm của Archimedes. Bậc thày người Hy Lạp là người đầu tiên sử dụng toán học để giải thích các hiện tượng tự nhiên. Sau đó, trải qua một con đường đầy khổ ải thông qua những người làm tính và các nhà toán học ở cung đình Italia, bản chất của toán học đã đạt được địa vị của một chủ đề đáng để thảo luận. Cuối cùng, một số trong các nhà toán học dòng Tên ở thời Galileo, mà đặc biệt là Christopher Clavius, cũng đã nhận ra một thực tế là toán học có thể chiếm vị trí trung gian giữa siêu hình học - các nguyên lý triết học về bản chất của tồn tại - và thực tại vật lý. Trong phần lời tựa của cuốn *Bình luận về tác phẩm "Cơ sở" của Euclid*, Clavius đã viết:

> Vì các môn toán học giải quyết những vấn đề được xem là tách biệt hẳn với bất cứ thứ vật chất nào có thể cảm nhận được, mặc dù chúng được nhúng vào các đối tượng vật chất, song rõ ràng là chúng chiếm một vị trí trung gian giữa siêu hình học và khoa học tự nhiên, nếu chúng ta xét đến đối tượng của chúng.

Galileo không hài lòng với quan niệm cho rằng toán học chỉ nằm đâu đó ở giữa hay đường dẫn. Ông đã tiến thêm một bước táo bạo khi đặt ngang toán học với ngôn ngữ riêng của Chúa. Tuy nhiên, sự xác nhận này lại đặt ra một vấn đề nghiêm trọng khác - một vấn đề sẽ có ảnh hưởng đầy bi kịch đến cuộc đời của Galileo.

Khoa học và thần học

Theo Galileo, Chúa nói bằng ngôn ngữ của toán học trong việc thiết kế nên tự nhiên. Theo Nhà thờ Thiên chúa giáo thì Chúa lại là “tác giả” của Kinh thánh. Vậy khi đó cái gì đã làm cho trong một số trường hợp những giải thích khoa học dựa trên toán học dường như lại mâu thuẫn với kinh thánh? Các nhà thần học của Hội đồng giáo hội năm 1546 đã trả lời bằng những lời lẽ dứt khoát rằng: “Không ai dựa trên sự suy xét của riêng mình và bóp méo Kinh thánh theo những quan niệm riêng của anh ta lại dám lý giải nó ngược với ý nghĩa mà Giáo hội Đức Thánh mẹ, người duy nhất có quyền phán xử về ý nghĩa đích thực của nó, đã và đang giữ vững”. Theo đó, khi các nhà thần học vào năm 1616 được đề nghị đưa ra ý kiến của họ về vũ trụ nhật tâm của Copernicus, họ đã kết luận rằng đó là “hoàn toàn dị giáo, vì nó công khai mâu thuẫn với Kinh thánh ở nhiều chỗ”. Nói cách khác, điều thực sự là tâm điểm của sự chối bỏ của Nhà thờ đối với học thuyết Copernicus của Galileo không phải là việc đưa Trái đất ra khỏi vị trí trung tâm của nó trong vũ trụ, mà là sự thách thức đối với uy quyền của nhà thờ trong việc diễn giải kinh thánh. Trong bối cảnh mà Giáo hội Thiên chúa giáo La mã thực sự cảm thấy thế trận đã được dàn sẵn bởi những tranh luận gay gắt với các nhà thần học cải cách, thì Galileo và Nhà thờ rõ ràng là không thể tránh khỏi đụng độ.

Các sự kiện bắt đầu diễn ra nhanh chóng vào cuối năm 1613. Một cựu sinh viên của Galileo là Benedetto Castelli đã có một bài thuyết trình về những khám phá thiên văn mới trước Đại công tước Tuscany và cận thần của ông. Có thể dự đoán trước được rằng ông sẽ bị áp lực phải giải thích sự khác biệt rõ ràng giữa vũ trụ học của Copernicus và một số mô tả trong kinh thánh, như cảnh Chúa dừng Mặt trời và Mặt trăng lại để cho Joshua và người Do thái hoàn thành chiến thắng của họ trước Emorites ở Thung lũng Ayalon. Mặc dù Castelli nói rằng ông đã "hành xử như một người chiến sĩ" trong việc bảo vệ học thuyết Copernicus, song Galileo phần nào cảm thấy lo ngại trước tin tức về sự đối đầu này, và ông cảm thấy buộc phải bày tỏ quan điểm của mình về sự mâu thuẫn giữa khoa học và Kinh thánh. Trong một bức thư dài gửi Castelli đề ngày 21 tháng 12 năm 1613, Galileo đã viết:

> Tuy vậy, trong Kinh thánh, để làm cho nó phù hợp với sự hiểu biết của đại đa số, cần thiết phải nói rất nhiều điều có vẻ bên ngoài khác biệt với ý nghĩa chính xác. Ngược lại, tự nhiên là không thể lay chuyển và không thể thay đổi được, và nó cũng không quan tâm đến chuyện những nguyên nhân ẩn giấu và các cách thức vận hành của nó có là dễ hiểu đối với loài người hay không, và vì thế nó không bao giờ chệch khỏi các quy luật đã được áp đặt cho nó. Do đó, dường như đối với tôi không có hiệu ứng nào của tự nhiên, mà kinh nghiệm đặt nó ngay trước mắt chúng ta hoặc nó là kết luận tất yếu rút ra từ bằng chứng, lại có thể dẫn đến những nghi ngờ đối với các đoạn trong Kinh thánh, vốn chứa hàng ngàn từ với vô vàn cách diễn giải khác nhau, vì mỗi câu trong Kinh thánh không bị ràng buộc bởi các quy luật cứng nhắc như là mỗi hiệu ứng của tự nhiên.

Sự diễn giải về ý nghĩa của Kinh thánh này rõ ràng là lạ lẫm đối với một số nhà thần học nghiêm khắc hơn. Ví dụ như Domingo Banez, một tu sĩ dòng Dominic đã viết vào năm 1584: "Chúa thánh thần không chỉ gợi cảm hứng cho tất cả những gì chứa đựng trong Kinh thánh, mà người còn quy định và gợi ý từng từ mà nó đã được viết ra". Nhưng điều đó đã không thuyết phục được Galileo. Trong *Lá thư gửi Castelli*, ông thêm:

> Tôi có chiều hướng nghĩ rằng uy quyền của Kinh thánh là có ý định thuyết phục con người về những chân lý đó, những chân lý cần thiết để cứu rỗi họ nhưng đồng thời cũng vượt xa tầm hiểu biết của con người, không thể được làm cho trở nên đáng tin cậy bởi bất kỳ sự học hỏi nào, hay bất kỳ phương tiện nào khác hơn là sự thiên khải của Chúa thánh thần. Nhưng cũng chính vị Chúa đó, người đã ban cho con người cảm giác, lý trí, và sự hiểu biết, lại không cho phép chúng ta sử dụng chúng, và muốn cho chúng ta biết về những kiến thức như vậy theo cách nào đó khác, khi mà chúng ta ở cái vị thế tự mình có thể giành được bằng chính các khả năng đó, *điều đó* dường như đối với tôi không buộc phải tin, đặc biệt là liên quan đến những khoa học mà về chúng trong Kinh thánh chỉ chứa đựng những mảnh nhỏ rời rạc và những kết luận rất khác nhau; và đây chính xác là trường hợp của thiên văn học, trong đó mới chỉ nói tới rất ít, thậm chí các hành tinh còn không được liệt kê đầy đủ.

Một bản sao lá thư của Galileo đã được gửi tới Giáo đoàn của Văn phòng Tòa Thánh ở Roma, nơi mà các vấn đề liên quan đến đức tin được đánh giá chung, và đặc biệt là gửi tới vị Hồng y giáo chủ Robert Bellarmine rất có thế lực (1542-1621). Phản ứng ban đầu của Bellarmine với học thuyết Copernicus là khá ôn hòa, vì ông xem toàn bộ mô hình nhật tâm là “cách để cứu vãn thể diện theo lối giống như của những người đề xướng ra các ngoại luân nhưng thực ra lại không tin vào sự tồn tại của chúng”. Giống như những người trước ông ta, Bellarmine cũng đối xử với các mô hình toán học do các nhà thiên văn đưa ra chỉ như là một thứ mánh lới quảng bá tiện lợi, tạo ra để mô tả những gì mà con người quan sát được, mà không được gắn với thực tại vật lý. Ông lập luận rằng phương kế “cứu vãn thể diện” đó không chứng minh được rằng Trái đất thực sự chuyển động. Do vậy, Bellarmine không thấy có gì đe dọa trực tiếp từ cuốn sách của Copernicus (*De Revolutionibus*), thậm chí mặc dù ông ta đã nhanh chóng bổ sung thêm rằng tuyên bố Trái đất chuyển động sẽ không chỉ “làm bực tức tất cả các triết gia kinh viện và các nhà thần học” mà còn “gây tổn hại đến đức tin linh thiêng do diễn giải sai lầm Kinh thánh”.

Những chi tiết đầy đủ trong phần còn lại của câu chuyện bi kịch nói trên nằm ngoài phạm vi và mục tiêu chính của cuốn sách này, do vậy ở đây tôi sẽ chỉ trình bày một cách ngắn gọn. Vào năm 1616 Giáo đoàn Kiểm duyệt đã ra lệnh cấm cuốn sách của Copernicus. Những nỗ lực sau đó của Galileo dựa vào rất nhiều đoạn lấy từ nhà thần học được sùng kính nhất trong số các nhà thần học tiền bối là Thánh Augustine để hỗ trợ cho việc diễn giải mối quan hệ giữa khoa học tự nhiên và Kinh thánh cũng không giúp ông có được nhiều sự thông cảm. Mặc cho những bức thư rất rõ ràng mà trong đó luận điểm chính của ông là không hề có sự bất đồng (về thực chất chứ không phải là bề ngoài) giữa học thuyết của Copernicus và Kinh thánh, nhưng các nhà thần học ở thời ông vẫn xem những lập luận của Galileo là một sự xâm nhập không được chào đón vào lãnh địa của họ. Nhưng cũng thật là trơ trẽn, chính những nhà thần học này lại tha hồ bày tỏ các quan điểm của mình về các vấn đề khoa học.

Khi những đám mây đen đang tụ lại ở phía chân trời, Galileo vẫn tiếp tục tin rằng lý trí sẽ thắng thế - một sai lầm to lớn khi mà điều đó thách thức đức tin. Galileo cho xuất bản cuốn *Đối thoại về hai hệ thống thế giới chính* vào tháng 2 năm 1632 (hình 20 là

Hình 20

trang bìa của lần xuất bản đầu tiên). Cuốn sách luận chiến này là sự trình bày chi tiết nhất của Galileo về các ý tưởng của ông theo tinh thần học thuyết Copernicus. Hơn nữa, ông còn cho rằng bằng việc theo đuổi khoa học với sự sử dụng ngôn ngữ của sự cân bằng cơ học và toán học, con người có thể hiểu được trí tuệ thần thánh. Nói một cách khác, khi một người tìm ra lời giải cho một bài toán bằng cách dùng hình học tỷ lệ, thì những cái nhìn sâu sắc và hiểu biết có được cũng tựa như thần thánh vậy. Phản ứng của nhà thờ thật mau lẹ và dứt khoát. Việc lưu hành cuốn *Đối thoại* bị cấm ngay tháng 8 của năm phát hành. Trong tháng tiếp theo, bản thân Galileo bị triệu tập đến Roma để biện hộ cho mình trước cáo buộc là dị giáo. Galileo đã bị đưa ra xét xử vào ngày 12 tháng 4 năm 1633 và được xác định là "kẻ rất đáng ngờ là dị giáo" vào ngày 22 tháng 6 năm 1633. Các quan tòa đã kết tội Galileo là "đã tin và bảo vệ một học thuyết sai lầm trái ngược với Kinh thánh, một học thuyết cho rằng Mặt trời là trung tâm của thế giới và không phải nó di chuyển từ đông sang tây mà là Trái đất chuyển động và nó không còn là trung tâm của thế giới nữa". Lời kết tội hết sức nghiêm khắc:

> Tòa kết án bị can phải bị giam trong nhà tù chính thức của Giáo đoàn thánh tín này, và để hối cải hữu ích, Tòa yêu cầu bị can trong ba năm tới mỗi tuần một lần, phải nhắc lại kinh thánh thi sám hối 7 lần. Tòa bảo lưu quyền tự do điều chỉnh, giảm nhẹ hoặc xóa bỏ, toàn bộ hoặc một phần, các hình phạt và sự sám hối đã nêu ở trên.

Ông già 70 tuổi Galileo kiệt quệ không thể chịu đựng được áp lực. Với tinh thần bị suy sụp, Galileo đã gửi bức thư chối bỏ, trong đó ông cam kết sẽ "từ bỏ hoàn toàn quan điểm sai lầm cho rằng Mặt trời là trung tâm của thế giới và không chuyển động, rằng Trái đất là chuyển động và không phải là trung tâm của thế giới". Ông kết luận:

> Do đó, với mong muốn xóa bỏ khỏi đầu óc của Đức giáo chủ, và của tất cả tín đồ Cơ đốc giáo sùng đạo, sự nghi ngờ mạnh mẽ vừa mới hình thành này đối với tôi, với tấm lòng chân thành và niềm tin thành thực, tôi nguyện từ bỏ, nguyền rủa và ghê tởm những sai lầm, dị giáo đã nói trên, và nói chung mọi sai lầm, dị giáo khác, và bất kỳ giáo phái nào đi ngược lại với Giáo hội, và tôi xin thề là trong tương lai sẽ không bao giờ nói hay khẳng định, bằng miệng hay bằng văn bản, một lần nữa bất kỳ điều gì có thể tạo cơ hội cho sự nghi ngờ tương tự đối với tôi.

Cuốn sách cuối cùng của Galileo, nhan đề *Bàn về các chứng minh toán học liên quan đến hai khoa học mới* được phát hành vào tháng 7 năm 1638. Bản thảo đã được bí mật đưa ra khỏi nước Ý và được in tại Leiden, Hà Lan. Nội dung của cuốn sách này đã bày tỏ một cách mạnh mẽ và chân thực tình cảm của ông biểu hiện bằng những mấy từ huyền thoại "*Eppur si muove*" ("Dù sao thì nó vẫn chuyển động"). Câu nói bướng bỉnh đó, thường được cho là Galileo đã nói vào cuối buổi xét xử, nhưng có lẽ đã chưa bao giờ được thốt ra miệng.

Ngày 31 tháng 10 năm 1992, Giáo hội Cơ đốc cuối cùng đã quyết định "phục vị" cho Galileo. Nhận ra rằng Galileo hoàn toàn đúng đắn, nhưng vẫn lảng tránh chỉ trích trực tiếp Tòa án dị giáo, Giáo hoàng John Paul II đã nói:

> Thật nghịch lý là Galileo, một tín đồ chân thành, đã chứng tỏ mình là sáng suốt về vấn đề này [tức sự khác biệt rõ ràng giữa khoa học và kinh thánh] hơn là các nhà thần học đối thủ của ông. Phần lớn các nhà thần học đã không nhận thức được sự khác biệt hình thức vốn tồn tại giữa bản thân Kinh thánh và sự diễn giải nó, và điều này đã dẫn họ tới việc chuyển một cách không chính đáng một vấn đề thực sự thuộc về nghiên cứu khoa học sang học thuyết tôn giáo.

Báo chí khắp nơi thế giới đã có một bữa tiệc. Tờ *Thời báo Los Angeles* đã tuyên bố: "Tin chính thức: Trái đất quay xung quanh Mặt trời, ngay cả với Vatican".

Nhưng nhiều người lại không thấy vui. Một số thấy rằng *sự nhận lỗi* này của nhà thờ là quá nhỏ, quá muộn. Nhà học giả Tây Ban Nha chuyên nghiên cứu về Galileo là Antonio Beltrán Marí đã nhận xét:

> Thực tế mà Đức giáo hoàng tiếp tục coi mình là một quyền uy có thể nói điều gì đó liên quan đến Galileo và khoa học của ông cho thấy, về phía Đức giáo hoàng, là không gì thay đổi cả. Ông ta đã hành xử đúng theo cách như những quan tòa xét xử Galileo, những người mắc sai lầm mà ông ta bây giờ mới thừa nhận.

Công bằng mà nói thì Đức giáo hoàng tự nhận thấy mình ở trong một tình thế không chiến thắng. Bất kỳ quyết định nào về phía ông, dù là làm ngơ trước vấn đề này và vẫn giữ nguyên sự kết tội đối với Galileo về những cuốn sách, hay cuối cùng nhận ra sai lầm của nhà thờ, chắc chắn ông cũng đều bị chỉ trích. Dù vậy, vào thời đại khi mà có những nỗ lực để giới thiệu sáng thế luận theo kinh thánh như là một lý thuyết "khoa học" để thay thế (dưới danh nghĩa được che đậy mỏng manh là "bản thiết kế thông minh"), sẽ thật là đúng lúc khi nhớ lại rằng Galileo đã thực sự đấu tranh trong trận chiến này gần 400 năm trước - và đã chiến thắng!

CHƯƠNG 4

CÁC NHÀ ẢO THUẬT: KẺ HOÀI NGHI VÀ NGƯỜI KHỔNG LỒ

Ở một trong bảy đoạn kịch trào phúng của bộ phim *Mọi chuyện bạn muốn biết về sex (nhưng ngại hỏi)*, Woody Allen đóng vai một anh hề của triều đình, người hàng ngày phải diễn hài cho một vị vua thời trung cổ và đám cận thần của ông ta xem. Anh hề phải lòng hoàng hậu, vì vậy đã đưa cho bà ta thuốc kích dục, với hy vọng là sẽ quyến rũ được bà. Hoàng hậu bị hấp dẫn bởi anh hề, nhưng than ôi, bà lại có một cái móc khóa rất lớn trên dây lưng trinh tiết của bà ta. Trước tình thế nản lòng này trong phòng ngủ của hoàng hậu, anh hề đã thốt lên nỗi lo lắng: "Tôi phải nhanh chóng nghĩ ra được cách nào đó, trước khi thời Phục hưng tới, nếu không, *cả* hai ta sẽ phải lên tranh mất".

Ngoài sự đùa cợt ra thì sự phóng đại quá mức này là một miêu tả có thể hiểu được về các sự kiện ở châu Âu trong suốt thế kỷ 15 và 16. Thời đại Phục hưng thực sự đã tạo ra một kho tàng giàu có những kiệt tác trong hội họa, điêu khắc và kiến trúc tới mức mà cho tới tận ngày nay, những tác phẩm nghệ thuật đáng kinh ngạc đó tạo nên phần chủ yếu trong nền văn hóa của chúng ta. Trong khoa học, thời Phục Hưng chứng kiến cuộc cách mạng nhật tâm trong thiên văn học, dẫn đầu là Copernicus, Kepler và đặc biệt là Galileo. Quan điểm mới về vũ trụ được mang lại từ những quan sát của Galileo bằng kính viễn vọng và những hiểu biết sâu sắc có được từ các thí nghiệm của ông trong cơ học, có lẽ là hơn bất kỳ thứ gì khác đã thúc đẩy sự phát triển toán học trong thế kỷ tiếp theo. Giữa những dấu hiệu sụp đổ đầu tiên của triết học Aristotle và những thách thức đối với hệ tư tưởng thần học của Nhà thờ, các nhà triết học đã bắt đầu tìm kiếm một nền tảng mới để trên đó dựng lên lâu đài tri thức của con người. Toán học, với một khối lượng các chân lý dường như chắc chắn của nó, đã cung cấp cái có vẻ như là một cơ sở hợp lý nhất cho một sự khởi đầu mới.

Một người mơ

Nhiều người coi Descarte (hình 21) vừa là một triết gia hiện đại vĩ đại đầu tiên và cũng là một nhà sinh học hiện đại đầu tiên. Khi bạn bổ sung thêm vào lời giới thiệu ấn tượng này một thực tế là nhà triết học theo chủ nghĩa kinh nghiệm Anh John Stuart Mill (1806-73) đã mô tả một trong những thành tựu của Descartes trong toán học như là "một bước vĩ đại nhất được thực hiện trong tiến trình của khoa học chính xác", thì chắc hẳn bạn sẽ bắt đầu nhận ra sự bao la của sức mạnh trí tuệ của Descartes.

René Descartes sinh ngày 31 tháng 3 năm 1596, tại La Haye, Pháp. Để tôn vinh vị công dân nổi tiếng nhất của mình, thị trấn đã

Hình 21

được đổi tên thành La Haye-Descartes vào năm 1801 và từ năm 1967, nó được biết đến với cái tên đơn giản là Descartes. Năm 8 tuổi, Descartes vào học tại trường dòng Tên ở La Flèche, nơi ông đã học tiếng Latinh, toán học, văn học Hy La, khoa học và triết học kinh viện cho đến năm 1612. Vì sức khỏe ông khá yếu ớt nên Descartes được miễn phải dậy sớm vào cái giờ khắc nghiệt là 5 giờ sáng, và ông được phép dùng cả thời gian buổi sáng ở trên giường. Sau này, trong suốt cuộc đời, ông vẫn tiếp tục sử dụng phần đầu của buổi sáng để suy ngẫm, và ông từng nói với nhà toán học người Pháp Blaise Pascal rằng cách duy nhất giúp ông sống khỏe mạnh và làm việc năng suất là ông không bao giờ dậy trước khi ông cảm thấy thoải mái để làm điều đó. Rồi chúng ta sẽ sớm thấy, câu nói này hóa ra lại là một lời tiên tri đầy bi kịch.

Sau La Flèche, Descartes tốt nghiệp khoa Luật trường Đại học Poitiers, nhưng ông chưa bao giờ thực sự hành nghề luật sư cả. Bồn chồn và háo hức khám phá thế giới, Descartes quyết định gia nhập quân đội của Hoàng tử Maurice xứ Orange, mà khi đó đóng quân tại Breda (Hà Lan). Một cuộc gặp gỡ tình cờ tại Breda đã trở thành rất quan trọng trong sự phát triển trí tuệ của Descartes.

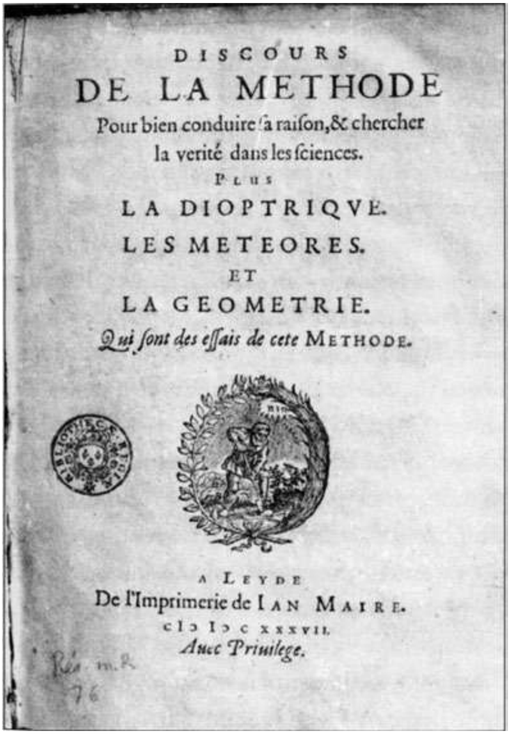
Theo truyền thuyết thì trong khi đang đi lang thang trên phố, ông bất chợt nhìn thấy một tấm bảng thông cáo dường như trên đó có đưa ra một câu đố toán học. Descartes đã nhờ người đầu tiên đi ngang qua dịch giúp ông từ tiếng Hà Lan sang tiếng Latinh hoặc tiếng Pháp. Vài tiếng sau, Descartes đã giải thành công bài toán, và điều này thuyết phục bản thân ông rằng ông thực sự có năng khiếu toán học. Người dịch giúp ông hóa ra lại không phải ai khác mà chính là nhà khoa học và toán học người Hà Lan Isaac Beeckman (1588-1637), người đã có ảnh hưởng đến sự nghiệp nghiên cứu toán-lý của Descartes còn tiếp tục kéo dài trong nhiều năm. Chín năm tiếp theo đã chứng kiến sự thay đổi của Descartes từ chỗ ồn ào huyên náo ở Paris đến việc phục vụ trong một số quân đoàn. Trong một châu Âu đang vật lộn với các cuộc chiến tranh tôn giáo và chính trị và sự khởi đầu của Cuộc chiến tranh 30 năm, thì việc Descartes tìm được các trận chiến hay các tiểu đoàn đang hành quân để gia nhập, ở Praha, Đức, hay Transylvania, là điều chẳng khó khăn gì. Tuy nhiên, trong suốt thời gian đó ông vẫn tiếp tục, như ông từng nói, "bù đầu nghiên cứu toán học".

Vào ngày 10 tháng 11 năm 1619, Descartes trải qua ba giấc mơ không chỉ có ảnh hưởng mạnh mẽ đến phần còn lại cuộc đời *ông* mà có lẽ còn đánh dấu sự khởi đầu của thế giới hiện đại. Về sau khi mô tả sự kiện này, Descartes đã nói trong một ghi chép của ông: "Tôi tràn đầy nhiệt huyết và đã khám phá ra những nền tảng của một khoa học kỳ diệu". Vậy những giấc mơ có tầm ảnh hưởng này là về điều gì?

Thực sự thì hai trong số đó là ác mộng. Trong giấc mơ đầu tiên, Descartes thấy mình bị cuốn trong một cơn lốc xoáy, nó xoay ông một cách dữ dội trên gót chân trái. Ông cũng rất hoảng sợ bởi một cảm giác liên tục bị rơi xuống từng nấc một. Rồi một ông già xuất hiện và cố gắng tặng cho ông một trái dưa từ một vùng đất lạ. Giấc mơ thứ hai cũng là những hình ảnh kinh hoàng. Ông bị nhốt vào một căn phòng với những tiếng sấm nổ đinh tai và những tia lửa bay loạn xạ xung quanh. Đối ngược hoàn toàn với hai giấc mơ đầu, giấc mơ thứ ba là một bức tranh yên tĩnh và trầm tư. Khi mắt ông quét quanh căn phòng, Descartes thấy các cuốn sách lúc hiện lúc ẩn trên một cái bàn. Chúng gồm một tuyển tập thơ mang tên *Corpus Poetarum* và một quyển bách khoa toàn thư. Ông mở tập thơ một cách ngẫu nhiên và thoáng thấy dòng mở đầu một bài thơ của nhà thơ La Mã thế kỷ thứ 4 tên là Ausonius. Nó viết: "*Quod vitae sectabor iter?*" ("Con đường nào tôi sẽ theo đuổi trong cuộc đời này?"). Rồi một người đàn ông như có phép thần xuất hiện từ không khí và ngâm một câu thơ khác: "*Est et non*" ("Có và không" hay "Đúng và không đúng"). Descartes muốn chỉ cho người đàn ông đó câu thơ của Ausonius, nhưng toàn bộ hình ảnh biến mất vào hư không.

Thông thường với các giấc mơ, tầm quan trọng của chúng không nằm nhiều ở nội dung thực sự, thường là khó hiểu và kỳ quặc, mà là ở sự diễn giải mà người mơ lựa chọn. Trong trường hợp của Descartes, hiệu ứng của ba giấc mơ bí ẩn này rất đáng kinh ngạc. Ông coi cuốn bách khoa thư là biểu thị cho tri thức khoa học chung và tuyển tập thơ là tượng trưng cho triết học, cho sự phát lộ và nhiệt huyết. Cụm từ "Có và không" - cặp đối nghịch nổi tiếng của Pythagoras - ông hiểu như là sự biểu thị cho chân lý và sai lầm. (Không có gì là ngạc nhiên, khi một số diễn giải phân tâm học đã gắn trái dưa với ý nghĩa tình dục). Descartes hoàn toàn bị thuyết phục rằng những giấc mơ đó đã chỉ cho ông hướng thống nhất toàn bộ tri thức của loài người bằng lý trí. Ông đã xuất ngũ vào năm 1621 nhưng tiếp tục chu du và nghiên cứu toán học trong năm năm tiếp theo. Tất cả những ai gặp Descartes vào thời gian đó, kể cả thủ lĩnh tinh thần có ảnh hưởng lớn đến ông là Hồng y giáo chủ Pierre de Bérulle (1575-1629), đều có ấn tượng sâu sắc về sự sắc sảo và khúc chiết trong tư duy của ông. Nhiều người đã khuyến khích ông nên cho xuất bản những ý tưởng của mình. Với bất kỳ chàng trai trẻ nào khác, thì những lời sáng suốt như của người cha như vậy sẽ có cùng một tác dụng ngược như một lời khuyên chọn nghề "Chất dẻo!" đến nhân vật của Dustin Hoffman trong bộ phim *The graduate*, nhưng Descartes thì khác. Vì ông đã khát khao đạt tới mục tiêu tìm kiếm chân lý, nên ông dễ dàng bị thuyết phục. Ông bèn chuyển tới Hà Lan, nơi mà vào thời gian đó dường như là một môi trường trí tuệ yên tĩnh hơn, và trong suốt 20 năm sau đó ông đã liên tục đạt được hết thành công này đến thành công khác.

Descartes đã xuất bản kiệt tác đầu tiên của ông về những nền tảng của khoa học, *Bàn về phương pháp dẫn dắt hợp lý lý trí và tìm kiếm chân lý trong khoa học*, vào năm 1637 (hình 22 là trang bìa của lần xuất bản đầu tiên). Kèm theo chuyên luận này còn có ba phụ lục xuất sắc về quang học, khí tượng học, và hình học. Tiếp theo là một tác phẩm về triết học, *Những suy ngẫm về triết học đầu tiên*, xuất bản năm 1641 và tác phẩm về



DISCOURS
DE LA METHODE
Pour bien conduire ſa raiſon, & chercher
la verité dans les ſciences.
PLUS
LA DIOPTRIQVE.
LES METEORES.
ET
LA GEOMETRIE.
Qui ſont des eſſais de cete METHODE.

A LEYDE
De l'Imprimerie de IAN MAIRE.
CIↃ IↃ C XXXVII.
Avec Privilege.

Hình 22

vật lý học, *Các nguyên lý của triết học*, xuất bản năm 1644. Descartes lúc đó đã nổi tiếng khắp châu Âu, trong số những người ngưỡng mộ và trao đổi thư từ với ông phải kể đến Công chúa Elisabeth xứ Bohemia (1618-80) bị lưu đày. Năm 1649, Descartes được mời đến giảng dạy triết học cho Nữ hoàng Christina đỏm dáng của Thụy Điển (1626-89). Vốn là người luôn ngưỡng mộ hoàng gia, nên Descartes đã nhận lời. Thực tế, lá thư của ông gửi cho nữ hoàng chứa đầy sự kính sợ hơi khúm núm kiểu thế kỷ 17 nên ngày nay đọc nghe khá nực cười: "Thần dám cam đoan ở đây với Đức bà rằng Ngài có thể ra lệnh cho thần bất kỳ điều gì, dù khó khăn đến đâu thần cũng sẵn sàng tất cả để thực hiện nó, và rằng ngay cả nếu thần sinh ra là một người Thụy điển hay Phần Lan thì thần cũng không thể hăng hái hơn hay hoàn hảo hơn [với Ngài] như thần bây giờ". Nữ hoàng 23 tuổi với ý chí sắt đá đã yêu cầu Descartes phải giảng bài cho bà vào cái giờ thật bất tiện là 5 giờ sáng. Ở vùng đất lạnh đến mức mà, như Descartes viết cho một người bạn của ông, ngay cả ý nghĩ ở đó cũng đóng băng, thì điều này quả thật chết người. "Tôi đã không ở đúng trong môi trường của mình", Descartes viết, "mà tôi thì chỉ muốn yên tĩnh và nghỉ ngơi, điều tốt đẹp mà những vị vua quyền lực nhất trên Trái đất không thể ban cho những người mà họ không thể tự kiếm được cho mình". Chỉ sau vài tháng đương đầu với mùa đông Thụy điển khắc nghiệt vào những giờ buổi sớm còn mờ tối, mà ông đã cố tránh trong suốt cuộc đời mình, Descartes đã bị viêm phổi. Ông mất ở tuổi 53 vào ngày 11 tháng 2 năm 1650, vào lúc 4 giờ sáng như thể ông tìm cách tránh bị gọi dậy một lần nữa. Người mà các tác phẩm của ông đã tuyên bố sự mở đầu cho kỷ nguyên hiện đại lại trở thành nạn nhân của thói trưởng giả của chính ông và tính đỏng đảnh của một nữ hoàng trẻ.

Descartes được mai táng ở Thụy điển, nhưng hài cốt của ông, hay ít nhất là một phần của nó, đã được chuyển về Pháp vào năm 1667. Ở đó, di hài ông được đổi chỗ nhiều lần cho đến cuối cùng được an táng vào ngày 26 tháng 2 năm 1819, tại một trong những nhà nguyện của Nhà thờ Saint-Germain-des-Prés. Hình 23 là tấm hình chụp tôi đứng bên tấm bia giản dị ca tụng Descartes. Hộp sọ được cho là của Descartes truyền tay từ người này đến người

Hình 23

khác ở Thụy Điển cho đến khi nó được một nhà hóa học có tên là Berzelius mua lại và chuyển nó tới Pháp. Hộp sọ này hiện đang lưu giữ tại Bảo tàng Khoa học tự nhiên, một nhánh của Musée de l'Homme (Bảo tàng về con người) ở Paris. Nó thường được trưng bày đối diện với hộp sọ của một người đàn ông Neanderthan.

Một người hiện đại

Cái nhãn "hiện đại", khi gắn với một người, thường hàm ý những cá nhân có thể chuyện trò một cách thoải mái với những người cùng địa vị về nghề nghiệp ở thế kỷ 20 (hay nay là 21). Điều khiến

Descartes thực sự là một người hiện đại là thực tế rằng ông dám *nghi vấn* tất cả những điều đã được khẳng định về triết học và khoa học trước thời ông. Ông từng nói rằng sở học của ông chỉ nhằm phục vụ để làm gia tăng sự bối rối của mình và khiến ông nhận ra sự ngu dốt của chính mình. Trong cuốn *Bàn về phương pháp* nổi tiếng của ông, ông đã viết: "Tôi đã quan sát đối với triết học, mà mặc dù đã được trau dồi bởi những trí tuệ giỏi giang nhất, song nó không phải không có những điểm gây tranh cãi và vì vậy mà đáng nghi ngờ". Trong khi số phận của nhiều ý tưởng triết học của chính Descartes cũng không khác là mấy ở chỗ những thiếu sót quan trọng trong các mệnh đề của mình mà các nhà triết học sau này đã chỉ ra, song thái độ hoài nghi trong sáng của ông đối với ngay cả những khái niệm cơ bản nhất chắc chắn làm cho ông trở nên hiện đại tới tận cốt lõi. Điều quan trọng hơn, từ góc nhìn của cuốn sách này, là Descartes đã nhận ra rằng phương pháp và quá trình suy luận của toán học đã cung cấp một cách chính xác *sự chắc chắn* mà các triết học kinh viện trước ông còn thiếu. Ông đã tuyên bố một cách rõ ràng:

> Những chuỗi dài bao gồm các suy luận dễ dàng và đơn giản mà các nhà hình học thường sử dụng để đi đến những chứng minh khó nhất của mình, đã cho tôi cơ hội giả thiết rằng *tất cả mọi thứ thuộc phạm vi tri thức của con người thì đều kết nối với nhau theo cùng một cách* [tác giả nhấn mạnh]. Và tôi nghĩ rằng, với điều kiện chúng ta cố gắng không thừa nhận điều gì đó là đúng đắn khi mà nó không đúng và luôn giữ được trật tự đòi hỏi để suy ra điều này từ điều khác, thì cuối cùng sẽ không có gì nằm ngoài tầm với hay là quá bí ẩn đến mức không khám phá ra được.

Tuyên bố táo bạo này, theo một nghĩa nào đó, vượt xa cả những quan niệm của Galileo. Đó không chỉ là vũ trụ vật lý được viết bằng ngôn ngữ toán học; mà toàn bộ tri thức của con người cũng phải tuân theo lôgic của toán học.Theo lời Descartes; "Nó [phương pháp toán học] là một công cụ của tri thức mạnh hơn hơn bất kỳ một công cụ nào khác mà loài người để lại cho chúng ta, như là nguồn của tất cả những thứ khác." Chính vì vậy, một trong những mục đích của Descartes là chứng minh rằng thế giới vật lý có thể được mô tả bằng toán học chứ không cần dựa vào bất kỳ cảm nhận nào vốn thường hay sai lầm của chúng ta. Ông biện minh rằng trí óc sẽ sàng lọc những cái mà mắt ta nhìn thấy và biến những tri giác ấy thành các ý tưởng. Sau cùng, Descartes cho rằng, "không có dấu hiệu chắc chắn nào để phân biệt giữa việc đang thức và đang ngủ", song Descartes băn khoăn tự hỏi, nếu mọi thứ mà chúng ta cảm nhận là hiện thực nhưng trong thực tế lại có thể chỉ là giấc mơ, thì làm thế nào chúng ta biết được rằng ngay cả Trái đất và bầu trời kia lại không phải là "ảo giác của những giấc mơ" được cài đặt vào giác quan của chúng ta bởi "một con quỷ hiểm ác có sức mạnh vô biên" nào đó? Hay, như Woody Allen từng nói: "Sẽ là thế nào nếu như mọi thứ chỉ là một ảo ảnh và không có gì tồn tại cả? Nếu mà như vậy thật thì quả là tôi đã trả giá quá cao cho tấm thảm của tôi rồi".

Đối với Descartes, sự tràn ngập những hoài nghi rắc rối này cuối cùng đã tạo ra cái mà sau đó trở thành lập luận đáng nhớ nhất của ông: *Cogito ergo sum* (Tôi tư duy nghĩa là tôi tồn tại). Nói cách khác, phía sau những tư duy cần phải có một đầu óc có ý thức. Có thể là nghịch lý, nhưng hành động hoài nghi bản thân nó không thể bị ghi ngờ! Descartes đã cố gắng sử dụng sự khởi đầu có vẻ như nhẹ nhàng này để xây dựng nên một công trình hoàn thiện của tri thức đáng tin cậy. Dù là triết học, quang học, cơ học, y học, phôi học hay khí tượng học, Descartes đều thử qua và đạt được những thành tựu đáng kể nhất định ở mỗi một ngành. Tuy nhiên, mặc dù ông vẫn khẳng định về khả năng suy luận của con người song Descartes lại không tin rằng chỉ có lôgic không thôi cũng có thể khám phá ra những chân lý cơ bản. Về cơ bản, ông cũng đi đến cùng một kết luận như Galileo, ông cho rằng: "Còn về lôgic, phương pháp suy luận và đa phần những kết quả tri giác của nó chỉ có ích trong việc truyền đạt những gì chúng ta đã biết.... hơn là trong việc nghiên cứu những điều chưa biết". Thay vì thế, thông qua những nỗ lực quả cảm của mình để phát minh lại, hay thiết lập, những nền tảng của toàn bộ các ngành kiến thức, Descartes đã thử sử dụng các nguyên lý mà ông đúc rút ra từ phương pháp toán học để đảm bảo rằng ông đang bước trên một nền tảng vững chắc. Ông đã mô tả những nguyên tắc này trong cuốn *Những quy tắc điều khiển trí tuệ*. Ông bắt đầu từ những chân lý mà ông không một chút hoài nghi (tương tự như các tiên đề trong hình học của Euclid); rồi ông thử chia nhỏ những vấn đề khó thành những phần dễ xử lý hơn; ông sẽ đi từ những cái thô sơ đến phức tạp; và ông sẽ kiểm tra kép toàn bộ quá trình của mình để bản thân ông hài lòng rằng không có lời giải tiềm năng nào bị bỏ qua. Khỏi phải nói rằng ngay cả với một quá trình gian khổ và được xây dựng một cách thận trọng như vậy cũng không làm cho những kết luận của Descartes tránh được những sai lầm. Thực tế, mặc dù Descartes nổi tiếng nhất nhờ những đột phá vĩ đại trong triết học, song những đóng góp lâu dài nhất của ông lại là trong toán học. Giờ tôi sẽ tập trung đặc biệt vào một ý tưởng đơn giản nhưng sáng chói của ông mà John Stuart Mill đã xem như là một "bước vĩ đại nhất đã từng được thực hiện trong tiến trình của khoa học chính xác".

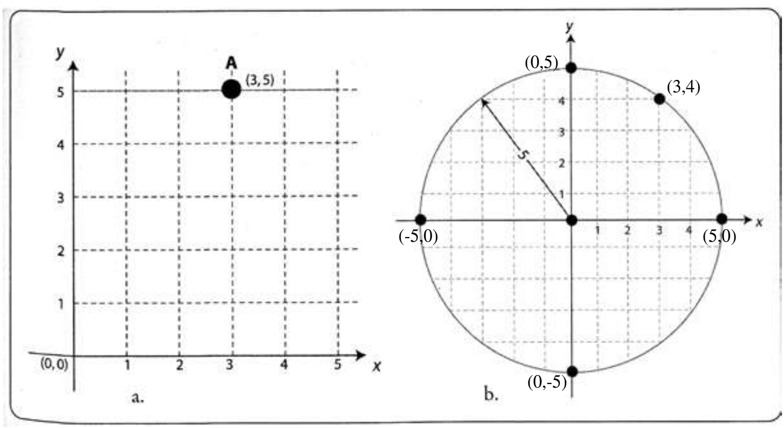
Toán học của tấm bản đồ thành phố New York

Hãy xem một phần tấm bản đồ Manhattan ở hình 24. Nếu bạn đứng ở góc Phố 34 và Đại lộ số 8 và bạn cần phải gặp một người ở góc Phố 59 và Đại lộ số 5 (hai chấm tròn đen trên H.24 - ND), thì chắc là bạn sẽ không gặp khó khăn gì trong việc tìm đường chứ, phải không? Đây chính là điều cốt yếu trong ý tưởng của Descartes về môn hình học mới. Ông đã trình bày những nét đại cương của nó trong Phụ lục ở trang 106 nhan đề *La Géométrie* (*Hình học*) của cuốn *Bàn về Phương pháp*. Thật khó tin nhưng khái niệm rất đơn giản này đã làm một cuộc cách mạng trong toán học. Descartes bắt đầu từ một thực tế hết sức bình thường là, như phần bản đồ Manhattan cho thấy, một cặp số trên mặt phẳng có thể xác định duy nhất vị trí của một điểm (ví dụ, điểm A trong H. 25a). Sau đó ông đã sử dụng thực tế này để phát triển thành một lý thuyết có sức mạnh to lớn về những đường cong - đó là *hình học giải tích*. Để tôn vinh Descartes, cặp đường thẳng giao nhau cho chúng ta một hệ quy chiếu được gọi là *hệ tọa độ Descartes*. Theo truyền thống, đường nằm ngang được ký hiệu là "trục x" (hay trục hoành), đường thẳng đứng là "trục y" (hay trục tung), và điểm giao nhau được gọi là "gốc". Chẳng hạn, điểm "A" trong

Hình 24

hình 25a có tọa độ x là 3 và tọa độ y là 5, và được ký hiệu bằng một cặp số có thứ tự là (3,5). (Lưu ý rằng gốc có tọa độ là (0,0).) Giờ giả sử rằng chúng ta muốn bằng cách nào đó mô tả tất cả các điểm trên mặt phẳng cách điểm gốc chính xác 5 đơn vị. Tất nhiên, đó chính là định nghĩa hình học của đường tròn có tâm ở điểm gốc và có bán kính bằng 5 đơn vị (H. 25b). Nếu lấy điểm (3,4) trên đường tròn này, bạn sẽ thấy rằng tọa độ của nó thỏa mãn $3^2 + 4^2$

$= 5^2$. Thực tế, dễ dàng chứng minh rằng (bằng cách sử dụng định lý Pythagoras) các tọa độ (x,y) của một điểm bất kỳ trên đường tròn đều thỏa mãn hệ thức $x^2 + y^2 = 5^2$. Hơn nữa, các điểm thuộc đường tròn là những điểm duy nhất trên mặt phẳng có tọa độ thỏa mãn phương trình $x^2 + y^2 = 5^2$. Điều này có nghĩa là phương trình đại số $x^2 + y^2 = 5^2$ là đặc trưng chính xác và duy nhất cho đường tròn này. Nói cách khác, Descartes đã khám phá ra một cách để biểu thị một đường cong hình học bằng một phương trình đại số và ngược lại. Điều này có vẻ như không mấy lý thú đối với một đường tròn đơn giản, nhưng mọi đồ thị bạn đã từng nhìn thấy, như sự lên xuống của thị trường chứng khoán hàng tuần, nhiệt độ của Bắc Cực trong một thế kỷ trước, hay tốc độ giãn nở của vũ trụ đều dựa trên ý tưởng tài tình này của Descartes. Và vậy là đột nhiên, hình học và đại số không còn là hai nhánh tách biệt của toán học nữa mà là hai biểu hiện của cùng một chân lý. Phương



Hình 25

trình mô tả một đường cong hoàn toàn bao hàm mọi tính chất có thể tưởng tượng được của đường cong đó, kể cả, chẳng hạn như, tất cả các định lý của hình học Euclid. Và đó còn chưa phải là tất cả. Descartes đã chỉ ra rằng những đường cong khác nhau có thể được vẽ trên cùng một hệ tọa độ và các giao điểm của chúng có thể dễ dàng tìm được bằng cách tìm nghiệm chung của các phương trình đại số tương ứng của chúng. Theo cách này, Descartes đã tận dụng sức mạnh của đại số để chỉnh cho đúng những cái mà ông cho là thiếu sót đáng bực mình của hình học cổ điển. Chẳng hạn, Euclid đã định nghĩa một điểm như là một thực thể không có các bộ phận và không có kích thước. Khái niệm khá mơ hồ này đã trở nên lỗi thời vĩnh viễn một khi Descates đã định nghĩa rất đơn giản một điểm trên mặt phẳng là một cặp số có thứ tự (x,y). Nhưng ngay cả những nhận thức mới mẻ và sâu sắc này cũng chỉ là phần nổi của tảng băng chìm. Nếu hai đại lượng x và y có mối quan hệ theo cách sao cho mỗi giá trị của x luôn có một giá trị duy nhất tương ứng của y, thì chúng tạo nên cái được gọi là *hàm số*, mà hàm số thì thực sự là có mặt ở khắp mọi nơi. Dù bạn đang kiểm soát cân nặng hàng ngày của mình trong thời gian ăn kiêng, hay chiều cao của con bạn vào những ngày sinh nhật liên tiếp, hay sự phụ thuộc của lượng xăng hao phí trên mỗi dặm của xe ôtô của bạn vào tốc độ mà bạn lái, tất cả các dữ liệu đó đều có thể được biểu diễn bằng hàm số.

Các hàm số thực sự là bánh mì và bơ của các nhà khoa học, các nhà thống kê và kinh tế học hiện đại. Một khi mà nhiều thí nghiệm khoa học hay những quan sát được lặp đi lặp lại tạo nên cùng những mối tương quan hàm số, thì chúng có thể sẽ có được một vị thế cao là các *quy luật của tự nhiên* - tức những mô tả toán học về một hành vi mà mọi hiện tượng tự nhiên được phát hiện là tuân theo. Chẳng hạn, định luật vạn vật hấp dẫn của Newton, mà chúng ta sẽ còn trở lại ở phần sau của chương này, phát biểu rằng khi khoảng cách giữa hai chất điểm tăng gấp đôi thì lực hấp dẫn giữa chúng luôn giảm đi 4 lần. Chính vì vậy, ý tưởng của Descartes đã mở toang cánh cửa cho sự toán học hóa một cách có hệ thống của gần như mọi thứ - đó chính là điểm cốt lõi của quan điểm cho rằng Thượng đế là nhà toán học. Xét về mặt toán học thuần túy, bằng việc thiết lập sự tương đương giữa hai khía cạnh của toán học (đại số và hình học) mà trước đây được xem là tách rời nhau, Descartes đã mở rộng chân trời của toán học và lát đường tới vũ đài hiện đại của *giải tích*, cho phép các nhà toán học thoải mái đi từ nhánh toán học này sang nhánh toán học khác. Vì vậy không chỉ nhiều hiện tượng trở nên có thể mô tả được nhờ toán học, mà bản thân toán học cũng trở nên rộng hơn, phong phú hơn và thống nhất hơn. Như nhà toán học vĩ đại Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) nói: “Chừng nào mà đại số và hình học còn đi trên hai con đường tách rời nhau thì sự tiến bộ của chúng còn chậm chạp và những ứng dụng của chúng còn hạn chế. Song khi những khoa học này hợp lại với nhau, chúng sẽ lấy từ nhau sinh lực mới và từ đó tiến triển với một nhịp độ nhanh hướng tới sự hoàn thiện.”

Cũng quan trọng như những thành tựu của Descartes trong toán học, bản thân ông không hạn chế những hứng thú khoa học của mình chỉ trong toán học. Khoa học, ông nói, giống như một cái cây, với siêu hình học là gốc rễ, vật lý học là thân cây và ba cành chính của nó là cơ học, y học và đạo đức. Sự lựa chọn các nhánh đó thoạt nghe có vẻ hơi bất ngờ, song trong thực tế, các nhánh này tượng trưng rất đẹp cho ba lĩnh vực chính mà Descartes muốn ứng dụng các ý tưởng mới của mình: vũ trụ, cơ thể con người và cách cư xử trong cuộc sống. Descartes đã dành bốn năm đầu trong thời gian sống ở Hà Lan - từ 1629 đến 1633 - để viết cuốn chuyên luận về vũ trụ và vật lý học, *Le Monde (Thế giới)*. Tuy nhiên, ngay khi cuốn sách đã sẵn sàng để xuất bản thì Descartes bị sốc bởi một tin rất khó chịu. Trong bức thư gửi cho bạn ông, một nhà phê bình đồng thời là nhà triết học tự nhiên Marin Mersenne (1588-1648), ông đã than thở:

> Tôi đã định gửi ông cuốn *Thế giới* như là một món quà Năm mới. Hai tuần trước, tôi đã quyết định gửi ông ít nhất là một phần, nếu toàn bộ cuốn sách này chưa được sao chép kịp. Nhưng phải nói là đồng thời tôi cũng đã cất công tìm hiểu ở Leiden và Amsterdam xem liệu cuốn *Hệ thống thế giới* của Galileo đã có chưa, vì tôi nghe nói nó đã được phát hành ở Italia năm ngoái. Người ta còn bảo rằng nó đã được xuất bản ở Italia nhưng tất cả đều đã bị đốt ngay lập tức ở Roma, và rằng Galileo đã bị kết án và trừng phạt. Tôi đã sững sờ về chuyện này đến mức gần như quyết định là sẽ đốt tất cả các trang tôi đã viết, hay ít nhất thì cũng không để cho ai đọc chúng. Bởi tôi không thể tưởng tượng được rằng ông ấy - một người Italia, và theo như tôi hiểu, thì rất được Giáo hoàng ân sủng - lại có thể bị biến thành tội phạm không vì một lý do nào khác hơn là ông ấy đã cố gắng, mà thực sự ông ấy đã làm như vậy, để chứng minh rằng Trái đất đang chuyển động. Tôi

> biết là một số Hồng y giáo chủ cũng đã chỉ trích quan điểm này, nhưng tôi nghĩ là đã nghe nói rằng những điều tương tự như vậy đã được giảng dạy công khai ở Roma. *Tôi phải thừa nhận rằng nếu quan điểm đó là sai lầm thì toàn bộ nền tảng triết học của tôi cũng thế* [nhấn mạnh của tác giả], vì nó được chứng minh từ nền tảng này một cách hoàn toàn rõ ràng. Và nó còn đan bện một cách khăng khít vào tất cả các phần của cuốn chuyên luận của tôi tới mức tôi không thể loại bỏ nó đi mà không làm cho cả cuốn sách bị khiếm khuyết. Nhưng với cả thế giới, tôi không muốn xuất bản một cuốn sách mà trong đó chỉ cần một từ có thể bị Nhà thờ phản đối; vì vậy tôi thà đình lại còn hơn là xuất bản nó trong tình trạng bị cắt xén.

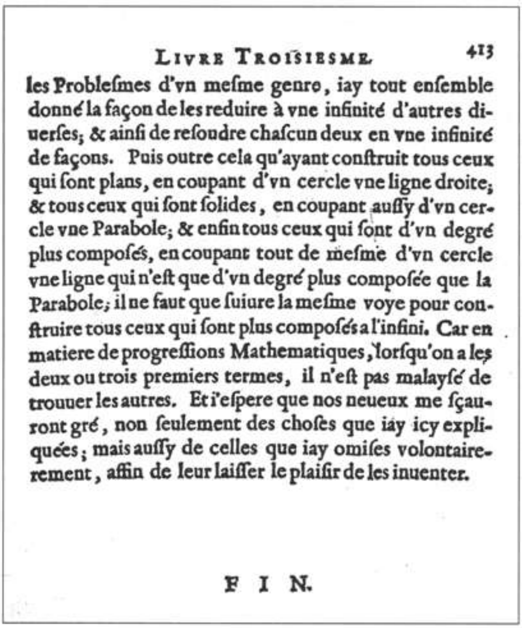
Descartes đã thực sự từ bỏ cuốn *Thế giới* (bản thảo chưa hoàn thiện cuối cùng cũng được xuất bản vào năm 1664), nhưng ông đã đưa hầu hết các kết quả vào cuốn *Các nguyên lý triết học* của mình, được xuất bản vào năm 1644. Trong cuốn chuyên luận trình bày có hệ thống này, Descartes đã giới thiệu các định luật của tự nhiên và lý thuyết của ông về các cuộn xoáy. Hai trong số các định luật của ông rất giống với định luật thứ nhất và thứ hai về chuyển động nổi tiếng của Newton, song những cái còn lại thì thực sự không đúng. Lý thuyết về các cuộn xoáy cho rằng Mặt trời ở trung tâm của một cuộn xoáy được tạo ra trong một thứ vật chất vũ trụ liên tục. Các hành tinh được cho là bị xoáy này cuốn vào chuyển động xung quanh Mặt trời giống như những chiếc lá rơi vào trong một xoáy nước hình thành trên dòng chảy của con sông. Tương tự, các hành tinh cũng được cho là tạo ra những cuộn xoáy thứ hai của chính mình, làm cho các vệ tinh bị cuốn vào chuyển động xung quanh các hành tinh này. Trong khi lý thuyết của Descartes về các cuộn xoáy là sai (như sau này Newton đã chỉ ra một cách không thương xót), nhưng nó vẫn khá thú vị, vì đây là sự cố gắng nghiêm túc đầu tiên nhằm phát biểu một lý thuyết về vũ trụ như một toàn bộ, dựa trên chính những định luật áp dụng trên bề mặt Trái đất. Nói cách khác, với Descartes, không có sự khác biệt giữa các hiện tượng dưới đất và trên trời - Trái đất là một phần của vũ trụ nên nó cũng phải tuân thủ các định luật vật lý phổ quát. Không may là Descartes lại bỏ qua các nguyên lý của chính mình trong việc xây dựng một lý thuyết chi tiết, ông không dựa vào toán học mà cũng chẳng dựa vào quan sát. Tuy nhiên, dù sao thì kịch bản của Descartes, trong đó Mặt trời và các hành tinh bằng cách nào đó đã làm nhiễu loạn vật chất trơn tru của vũ trụ xung quanh chúng, đã có chứa một số yếu tố mà rất lâu sau này trở thành hòn đá tảng của thuyết tương đối về hấp dẫn của Einstein. Trong thuyết tương đối rộng của Einstein, hấp dẫn không phải là một lực bí ẩn tác dụng qua những khoảng cách lớn của không gian. Mà chẳng qua chỉ là, những vật thể lớn như Mặt trời đã làm cong không gian ở vùng lân cận của chúng, tựa như một quả bowling làm cho tấm cao su căng bị lõm xuống. Các hành tinh thì đơn giản là đi theo những con đường ngắn nhất có thể trong không gian bị uốn cong đó.

Trong phần mô tả cực kỳ tóm tắt này về các ý tưởng của Descartes tôi đã bỏ qua một cách có cân nhắc hầu hết các công trình về triết học có ảnh hưởng mạnh mẽ về sau của ông, bởi vì điều này có thể sẽ dẫn chúng ta đi quá xa trọng tâm là bản chất của toán học (tôi sẽ còn trở lại một vài ý tưởng của ông về Chúa ở chương này sau). Tuy nhiên, tôi không thể kìm chế mình không nhắc tới lời bình luận thú vị được viết bởi nhà toán học người Anh Walter William Rouse Ball (1850-1925) vào năm 1908:

> Còn về phần các học thuyết triết học của ông [Descartes], chỉ cần nói rằng ông đã bàn luận về chính những vấn đề đã được tranh cãi trong suốt hai ngàn năm qua và có thể sẽ còn được tranh cãi với sự hăng hái không kém trong hai ngàn năm tới. Khỏi cần phải nói rằng bản thân những vấn đề này là rất quan trọng và hấp dẫn, nhưng từ bản chất của trường hợp này thì chưa có lời giải nào đã được đưa ra là có thể chứng minh hay bác bỏ một cách chặt chẽ; tất cả những cái có thể làm được chỉ là làm cho một giải thích này khả dĩ hơn một giải thích khác mà thôi, và bất cứ khi nào một nhà triết học như Descartes tin rằng, cuối cùng, ông cũng đã giải đáp được một vấn đề thì thể nào cũng có khả năng là những người kế tục ông sẽ chỉ ra những sai lầm trong các giả thuyết của ông. Tôi đã đọc ở đâu đó rằng triết học phần lớn luôn trăn trở chủ yếu với những mối quan hệ qua lại giữa Thượng đế, Tự nhiên và Con người. Những nhà triết học đầu tiên chính là những người Hy Lạp, họ chủ yếu bận tâm với các mối quan hệ giữa Thượng đế và Tự nhiên, và bận tâm đến Con người một cách riêng rẽ. Nhà thờ Thiên chúa giáo lại chăm chú vào mối quan hệ giữa Chúa và Con người tới mức hoàn toàn không đếm xỉa gì đến Tự nhiên. Và cuối cùng thì các nhà triết học hiện đại chủ yếu quan tâm đến mối quan hệ giữa Con người và Tự nhiên. Dù đây có là một sự tổng

quát hóa lịch sử của các quan điểm, từng liên tiếp nhau nổi lên, là đúng đắn hay không, tôi không quan tâm thảo luận ở đây, song phát biểu về phạm vi của triết học hiện đại đã đánh dấu những hạn chế của các tác phẩm của Descartes.

Descartes đã khép lại cuốn sách của mình về hình học bằng những lời như sau: “Tôi hy vọng rằng hậu thế sẽ đánh giá tôi một cách tử tế, không chỉ về những gì mà tôi đã giải thích mà cả về những thứ mà tôi đã cố ý bỏ lại nhằm dành cho những người khác niềm vui khám phá” (Hình 26). Ông không thể biết được rằng có một người mới chỉ 8 tuổi khi Descartes qua đời sẽ đưa những ý tưởng của ông về toán học như là trái tim của khoa học tiến một


LIVRE TROISIESME. 413

les Problefmes d'vn mefme genre, iay tout enfemble donné la façon de les reduire à vne infinité d'autres diuerfes; & ainfi de refoudre chafcun deux en vne infinité de façons. Puis outre cela qu'ayant conftruit tous ceux qui font plans, en coupant d'vn cercle vne ligne droite; & tous ceux qui font folides, en coupant auffy d'vn cercle vne Parabole; & enfin tous ceux qui font d'vn degré plus compofés, en coupant tout de mefme d'vn cercle vne ligne qui n'eft que d'vn degré plus compofée que la Parabole; il ne faut que fuiure la mefme voye pour conftruire tous ceux qui font plus compofés a l'infini. Car en matiere de progreffions Mathematiques, lorfqu'on a les deux ou trois premiers termes, il n'eft pas malayfé de trouuer les autres. Et i'efpere que nos neueux me fçauront gré, non feulement des chofes que iay icy expliquées; mais auffy de celles que iay omifes volontairerement, affin de leur laiffer le plaifir de les inuenter.

FIN.

Hình 26

bước khổng lồ về phía trước. Thiên tài không trội hơn này đã có nhiều cơ hội hơn để tận hưởng "niềm vui khám phá" so với bất kỳ cá nhân nào khác trong lịch sử loài người.

Và thế là có ánh sáng

Nhà thơ Anh vĩ đại thế kỷ 18 Alexander Pope (1688-1744) ở độ tuổi 39 khi Isaac Newton (1642-1727) qua đời (H. 27 là mộ của Newton ở trong Tu viện Westminster.) Trong một cặp câu thơ nổi tiếng, Pope đã cố gắng tóm lược những thành tựu của Newton:

Tự nhiên và các quy luật Tự nhiên nằm im lìm trong bóng tối
Thiên Chúa phán, sẽ có Newton! Và tất cả đều bừng sáng.

Gần 100 năm sau khi Newton mất, Lord Byron (1788-1824), trong trường ca *Don Juan* của mình, đã bổ sung những dòng như sau:

Và đó là con người trần duy nhất có thể vật lộn
Kể từ Adam, với sự rơi hay với quả táo.

Với các thế hệ các nhà khoa học sau Newton, ông thực sự đã và vẫn là một nhân vật của những huyền thoại, ngay cả nếu người ta không quan tâm đến huyền thoại. Câu nói nổi tiếng của Newton: "Nếu tôi nhìn được xa hơn chẳng qua là bởi tôi đứng trên vai những người khổng lồ", thường được xem như là một hình mẫu cho sự khoan dung và khiêm nhường mà người ta trông đợi các nhà khoa học bày tỏ khi nói về những khám phá vĩ đại nhất của họ. Thực ra

Hình 27

thì rất có thể Newton đã viết câu đó như một lời đáp lại mỉa mai kín đáo một cách tế nhị cho một bức thư của người mà ông xem là kẻ thù chủ yếu trong khoa học của mình, đó là nhà vật lý và sinh học Robert Hooke (1635-1703). Hooke đã buộc tội Newton về một số trường hợp là đã đánh cắp ý tưởng của ông ta, đầu tiên là lý thuyết về ánh sáng, và sau đó là về hấp dẫn. Vào ngày 20 tháng 1 năm 1676, Hooke đã chấp nhận một giọng hòa giải hơn và trong một bức thư riêng gửi cho Newton, ông ta đã viết: "Ý định của ông và của tôi [liên quan với lý thuyết ánh sáng], theo tôi, là đều nhằm vào cùng một điều, đó là Khám phá ra chân lý, và tôi cho rằng cả hai chúng ta có thể đều phải nghe những lời phản đối". Newton đã quyết định chơi lại theo đúng kiểu cách đó. Trong bức thư đáp lại Hooke, đề ngày 5 tháng 2 năm 1676, ông đã viết: "Điều mà Des-Cartes [Descartes] đã làm là một bước đi tuyệt vời [ám chỉ ý tưởng của Descartes về ánh sáng]. Ngài đã bổ sung thêm rất nhiều cách và đặc biệt là trong việc tính đến màu sắc của các bản mỏng trong suy xét triết học. Nếu tôi đã nhìn được xa hơn thì bởi vì tôi đứng trên vai những người khổng lồ". Vốn còn lâu mới được gọi là người khổng lồ, vì Hooke rất lùn và khổ sở với cái dáng gù xấu xí của mình, nên câu nói nổi tiếng này của Newton có thể chỉ đơn giản có nghĩa là ông cảm thấy mình hoàn toàn chẳng có gì phải hàm ơn Hooke cả! Thực tế, Newton đã tận dụng mọi cơ hội để lăng mạ Hooke, tuyên bố của ông rằng lý thuyết của riêng ông đã phá hủy "tất cả những gì ông ta [Hooke] đã nói" và sự từ chối không chịu đưa xuất bản cuốn sách của chính ông về ánh sáng, cuốn *Quang học*, cho đến tận khi Hooke qua đời, đã cho thấy cách giải thích ở trên về câu nói nổi tiếng này có thể đã không quá cường điệu. Mối hận thù giữa hai nhà khoa học thậm chí còn đạt tới đỉnh cao hơn khi liên quan đến lý thuyết về hấp dẫn. Khi Newton nghe thấy Hooke tuyên bố mình là người sáng tạo ra định luật hấp dẫn, ông đã tỉ mẩn và căm hận xóa bỏ mọi thứ có liên quan đến tên tuổi của Hooke ở phần cuối cuốn sách của ông về chủ đề này. Newton đã viết cho bạn ông là nhà thiên văn Edmond Halley (1656-1742) vào ngày 22 tháng 6 năm 1686:

> Ông ta [Hooke] lẽ ra nên xin lỗi vì sự bất tài của mình. Cứ theo như lời ông ta thì rõ ràng là ông ta không hề biết làm gì với nó. Nhưng bây giờ điều đó chẳng tuyệt vời sao? Các nhà toán học, những người đã có công khám phá, giải quyết và thực hiện tất cả mọi việc, phải tự hài lòng với việc trở thành những người làm tính khô khan và khổ hạnh, còn kẻ khác thì không làm gì ngoài việc

> huyênh hoang và vơ tất cả vào mình mọi thứ và cuỗm đi tất cả các phát minh của những người đi sau cũng như những người đi trước mình.

Ở đây Newton giải thích hết sức rõ ràng tại sao ông cho rằng Hooke không xứng đáng được nhận bất kỳ công trạng nào, đó là vì ông ta không thể phát biểu những ý tưởng của mình bằng ngôn ngữ toán học. Thực vậy, đặc tính khiến cho các lý thuyết của Newton thực sự đứng vững được - đặc tính cố hữu biến chúng trở thành các định luật tất yếu của tự nhiên - đó là chúng đều được diễn đạt bằng những hệ thức toán học nhất quán và sáng rõ như pha lê. Trong khi đó, những ý tưởng lý thuyết của Hooke, mà trong nhiều trường hợp cũng rất tài tình, lại trông chả khác gì một đống những ý kiến cảm tính, những phỏng đoán, và tư biện.

Một cách tình cờ, những biên bản viết tay của Hội Hoàng gia Luân Đôn từ năm 1661 đến năm 1682, tưởng đã bị thất lạc trong một thời gian dài, lại bất ngờ xuất hiện vào tháng 2 năm 2006. Những cuộn giấy da, trong đó có hơn 200 trang bản thảo được viết bởi chính Robert Hooke, đã được tìm thấy trong một ngôi nhà ở Hampshire, Anh quốc, mà người ta nghĩ rằng nó đã được cất giữ trong một cái tủ bếp khoảng 50 năm. Những biên bản từ tháng 12 năm 1679 đã mô tả sự trao đổi thư từ giữa Hooke và Newton trong đó họ thảo luận về một thí nghiệm xác nhận sự quay của Trái đất.

Trở lại với những kỳ công khoa học của Newton, ông đã dùng quan niệm của Descartes - cho rằng vũ trụ có thể được mô tả bởi toán học - và đã biến nó trở thành một thực tại được chấp nhận. Trong phần mở đầu cho tác phẩm bất hủ của ông

Những nguyên lý toán học của triết học tự nhiên (tiếng Latinh: *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*; thường được gọi tắt là *Principia*), ông đã tuyên bố:

> Chúng tôi đưa ra tác phẩm này như là những nguyên lý toán học của triết học, vì toàn bộ gánh nặng của triết học dường như được gộp tất ở trong đó - từ các hiện tượng chuyển động cho đến việc nghiên cứu các lực của tự nhiên, và sau đó là từ các lực này tới chứng minh các hiện tượng khác: và đó là cái đích mà các mệnh đề tổng quát trong Quyển thứ nhất và thứ hai hướng tới. Trong Quyển thứ ba, chúng tôi đưa ra một ví dụ về việc áp dụng những điều nói trên để giải thích về Hệ thống Thế giới; nhờ các mệnh đề đã được chứng minh bằng toán học trong hai quyển trước, trong quyển thứ ba, từ các hiện tượng thiên văn, chúng tôi rút ra lực hấp dẫn mà với nó các vật có xu hướng rơi về phía Mặt trời và các hành tinh. Và từ những lực này, bằng các mệnh đề toán học khác, chúng tôi suy ra chuyển động của hành tinh, sao chổi, Mặt trăng và biển.

Khi chúng ta nhận thấy rằng, trong cuốn *Principia,* Newton thực sự đã thực hiện được mọi thứ như ông hứa ở phần mở đầu, thì chỉ có một phản ứng duy nhất là thốt lên: tuyệt vời! Những ám chỉ bóng gió của Newton về vị thế cao hơn tác phẩm của Descartes cũng không sai lầm: Ông đã lựa chọn tiêu đề cuốn sách của mình là *Các nguyên lý toán học*, đối nghịch với của Descartes là *Các nguyên lý của triết học*. Newton cũng theo cùng một phương pháp luận và suy luận toán học ngay cả trong cuốn sách dựa trên thực nghiệm nhiều hơn của ông về ánh sáng, đó là cuốn *Quang học*. Mở đầu cuốn sách ông viết: "Ý muốn của tôi trong cuốn sách này không phải là để giải thích các Tính chất của Ánh sáng bằng các Giả thuyết, mà là đề xuất và chứng minh chúng bằng Lý luận và Thực nghiệm: Để làm điều đó, tôi sẽ đưa ra những định nghĩa và các tiên đề dưới đây". Sau đó ông tiếp tục như thể đây là cuốn sách về hình học Euclid, với các định nghĩa và mệnh đề ngắn gọn. Sau đó, trong phần kết luận, Newton đã nhấn mạnh thêm rằng: "Trong toán học, và do đó cả trong Triết học tự nhiên, sự Nghiên cứu về những Điều phức tạp bằng Phương pháp Phân tích, phải đi trước Phương pháp Tổng hợp".

Chiến công của Newton với bộ công cụ toán học của mình quả là một sự thần kỳ. Thiên tài này, người mà do sự tình cờ của lịch sử đã được sinh ra đúng vào năm Galileo qua đời, đã phát biểu các định luật cơ bản của cơ học, giải mã được những quy luật mô tả chuyển động của các hành tinh, xây dựng nên cơ sở lý thuyết của các hiện tượng ánh sáng và màu sắc, và đặt nền móng cho việc nghiên cứu phép tính vi tích phân. Chỉ riêng những thành tựu này cũng đủ để đưa Newton lên một vị trí danh dự trong số các nhà khoa học kiệt xuất nhất. Nhưng chính những nghiên cứu của ông về hấp dẫn mới đưa ông lên vị trí cao nhất trên bục danh dự dành cho những nhà ảo thuật - vị trí dành cho những nhà khoa học vĩ đại nhất từ trước tới nay. Công trình đó đã bắc cầu qua khoảng trống giữa trời và đất, đã hợp nhất các lĩnh vực thiên văn và vật lý học, và đặt toàn bộ vũ trụ dưới cùng một chiếc ô toán học. Vậy kiệt tác đó - *Principia* - đã được hình thành như thế nào?

Tôi đã bắt đầu nghĩ lực hấp dẫn mở rộng tới quỹ đạo của Mặt trăng

William Stukeley (1687-1765), một nhà vật lý, nhà khảo cổ, bạn của Newton (mặc dù họ chênh nhau hơn 40 tuổi), cuối cùng đã trở thành người viết tiểu sử đầu tiên của nhà khoa học vĩ đại. Trong cuốn *Hồi ức về cuộc đời Ngài Isaac Newton*, chúng ta thấy có đoạn miêu tả về một trong những huyền thoại nổi tiếng nhất trong lịch sử khoa học:

> Ngày 15 tháng 4 năm 1726, tôi đến thăm Ngài Isaac tại nơi ở của ông trong tòa nhà Orbels ở Kensington, ăn cơm với ông và dành cả ngày với ông, một mình... Sau bữa tối, thời tiết trở nên ấm áp, chúng tôi đi ra vườn và uống trà, dưới bóng của một vài cây táo, chỉ có tôi và ông. Giữa cuộc nói chuyện, ông bảo tôi rằng ông đang ở trong tâm trạng y như khi mà trước đây (năm 1666, khi Newton rời Cambridge trở về nhà vì dịch bệnh), ý niệm về hấp dẫn chợt nảy ra trong tâm trí ông. Đó là nhờ một quả táo rơi khi ông đang ngồi suy tư. Tại sao quả táo luôn rơi thẳng đứng xuống đất, ông đã tự hỏi mình. Tại sao nó không rơi sang bên hoặc rơi lên trên, mà lại nhất thiết cứ phải rơi về phía tâm Trái đất? Chắc chắn lý do ở đây là Trái đất đã kéo nó xuống. Phải có một lực kéo trong vật chất: và tổng các lực kéo trong vật chất của Trái đất phải hướng về tâm Trái đất, chứ không phải bên cạnh nó. Do đó, quả táo này phải rơi thẳng đứng, hay hướng về tâm Trái đất.

> Mà nếu vật chất kéo vật chất, thì lực phải tỷ lệ với khối lượng của nó. Vì thế quả táo kéo Trái đất cũng như Trái đất kéo quả táo vậy. Nghĩa là có một lực, cái mà chúng ta gọi ở đây là hấp dẫn, tự nó mở rộng ra khắp vũ trụ... Đây chính là sự ra đời của khám phá vĩ đại này, và từ đó ông đã xây dựng triết học trên một nền tảng vững chắc, khiến cả châu Âu phải kinh ngạc.

Bất luận sự kiện huyền thoại liên quan đến quả táo có thực sự xảy ra vào năm 1666 hay không, nhưng huyền thoại này đã đánh giá khá thấp thiên tài của Newton và chiều sâu lạ thường trong tư duy phân tích của ông. Trong khi chắc chắn là Newton đã viết bản thảo đầu tiên của ông về lý thuyết hấp dẫn trước năm 1669, tức là ông không cần phải nhìn thấy tận mắt một quả táo rơi để biết rằng Trái đất hút các vật ở gần bề mặt của nó. Sự hiểu biết sâu sắc của ông trong việc phát biểu định luật vạn vật hấp dẫn cũng không cần phải bắt nguồn chỉ từ việc nhìn một quả táo rơi. Thực tế, có một số dấu hiệu cho thấy rằng một số khái niệm chủ yếu mà Newton cần để đưa ra một lực hấp dẫn tác dụng trên phạm vi vũ trụ chỉ có thể được thai nghén vào những năm 1684-85. Một ý tưởng có tầm cỡ lớn như vậy là quá hiếm hoi trong biên niên sử của khoa học tới mức ngay cả những người có trí tuệ phi thường - như Newton - để đạt được nó cũng phải sau một chuỗi dài những bước tư duy.

Có thể tất cả được bắt đầu từ thời trẻ của Newton, với cuộc gặp gỡ không mấy mặn mà của ông với cuốn chuyên luận đồ sộ của Euclid về hình học, đó là cuốn *Cơ sở*. Theo sự xác nhận của chính Newton, ông đầu tiên chỉ "đọc tên của các mệnh đề", vì ông nhận thấy chúng dễ hiểu đến mức ông "đã băn khoăn tự hỏi làm sao lại có ai hứng thú viết ra những chứng minh này để làm gì".

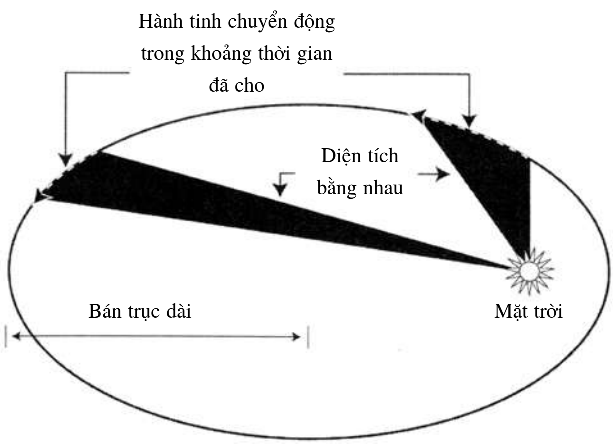
Mệnh đề đầu tiên thực sự khiến ông phải dừng lại và vẽ mấy đường dựng hình trong cuốn sách của mình, đó là phát biểu: "trong một tam giác vuông, bình phương cạnh huyền bằng tổng bình phương hai cạnh còn lại" - Định lý Pythagoras. Có lẽ phần nào hơi ngạc nhiên là, mặc dù Newton có đọc vài cuốn sách về toán học khi còn học ở trường Trinity College, Cambridge, song ông đã không đọc nhiều tác phẩm đã có vào thời đó. Rõ ràng là ông không cần phải làm như vậy!

Cuốn sách mà có lẽ có ảnh hưởng lớn nhất trong việc dẫn dắt tư duy khoa học và toán học của Newton không phải cuốn nào khác mà lại là cuốn *La Géométrie* của Descartes. Newton đã đọc nó vào năm 1664 và đọc đi đọc lại vài lần, cho đến khi "dần dần bản thân ông hoàn toàn làm chủ được toàn bộ vấn đề". Sự linh hoạt được mang lại bởi khái niệm hàm số và các biến số tự do của nó dường như đã mở ra những khả năng vô tận đối với Newton. Không chỉ hình học giải tích lát đường dẫn tới sự phát minh ra phép tính vi tích phân của Newton, với những khám phá gắn liền với nó về các hàm số, các đường tiếp tuyến và các độ cong, mà cả tinh thần khoa học bên trong con người Newton cũng thực sự rực cháy. Đã qua rồi các phép dựng hình chậm chạp bằng compa và thước kẻ, chúng đã được thay thế bằng những đường cong tùy ý, có thể được biểu diễn bằng các biểu thức đại số. Sau đó, vào năm 1665-66, một dịch bệnh khủng khiếp đã tấn công London. Khi những người chết đã lên đến hàng nghìn mỗi tuần, các trường học ở Cambridge đều bị đóng cửa. Newton buộc phải rời trường và trở về quê, một ngôi làng xa xôi tận Woolsthorpe. Ở đó, trong sự yên tĩnh của làng quê, Newton đã có những nỗ lực đầu tiên nhằm chứng minh rằng lực giữ cho Mặt trăng ở trên quỹ đạo của nó xung quanh Trái đất và lực hấp dẫn của Trái đất (chính là lực đã làm cho quả táo rơi xuống), trong thực tế, chính là một. Newton đã mô tả những cố gắng đầu tiên đó trong một bản ghi nhớ được viết vào năm 1714 như sau:

> Và cùng năm đó [1666] tôi đã bắt đầu suy nghĩ về lực hấp dẫn mở rộng tới quỹ đạo của Mặt trăng, và phát hiện ra làm cách nào để ước tính lực mà với nó [một] quả cầu quay bên trong một mặt cầu tác dụng lên mặt cầu đó, từ Định luật Kepler về chu kỳ quay của các Hành tinh tỷ lệ với lũy thừa bậc 3/2 của khoảng cách từ hành tinh đến tâm quỹ đạo của chúng, tôi đã suy ra rằng các lực giữ Hành tinh ở trên quỹ đạo của chúng phải [là] tỷ lệ nghịch với bình phương khoảng cách từ tâm mà chúng quay quanh: và nhờ việc so sánh lực cần thiết để giữ Mặt trăng trên quỹ đạo của nó với lực hấp dẫn ở bề mặt Trái đất, tôi đã có câu trả lời khá chính xác. Tất cả đều diễn ra trong hai năm dịch bệnh 1665 và 1666, những năm đó là thời gian chủ yếu cho những phát minh của tôi cũng như những suy ngẫm về toán học và triết học nhiều hơn bất kỳ lúc nào khác.

Ở đây Newton muốn nói tới một suy luận quan trọng của ông (từ định luật Kepler về chuyển động của các hành tinh), đó là lực hút hấp dẫn của hai vật thể hình cầu biến thiên tỷ lệ nghịch với bình phương khoảng cách giữa chúng. Nói cách khác, nếu khoảng cách giữa Trái đất và Mặt trăng tăng lên gấp 3 thì lực hấp dẫn mà Mặt trăng phải chịu sẽ nhỏ hơn 9 (tức 3 bình phương) lần.

Vì những lý do hoàn toàn chưa rõ, Newton, về căn bản, đã từ bỏ mọi nghiên cứu nghiêm túc về vấn đề hấp dẫn và chuyển động của các hành tinh cho mãi đến tận năm 1679. Sau đó hai bức thư từ đối thủ của ông là Robert Hooke đã làm hồi sinh sự hứng thú của ông đối với động lực học nói chung và chuyển động của các hành tinh nói riêng. Kết quả của sự hiếu kỳ tái sinh này là hết sức ấn tượng - sử dụng các định luật cơ học mà ông đã phát biểu trước đây, Newton đã chứng minh được định luật thứ hai của Kepler về chuyển động của các hành tinh. Đặc biệt, ông đã chứng tỏ được rằng khi hành tinh chuyển động theo quỹ đạo elíp của nó quanh Mặt trời, đường nối từ hành tinh đến Mặt trời sẽ quét được những diện tích bằng nhau qua những khoảng thời gian bằng nhau (hình 28). Ông cũng đã chứng minh được rằng với "một vật quay theo một hình elíp... thì lực hấp dẫn hướng tới một tiêu điểm của elíp đó... tỷ lệ nghịch với bình phương khoảng cách". Đây là những cột mốc quan trọng trên con đường dẫn tới *Principia*.

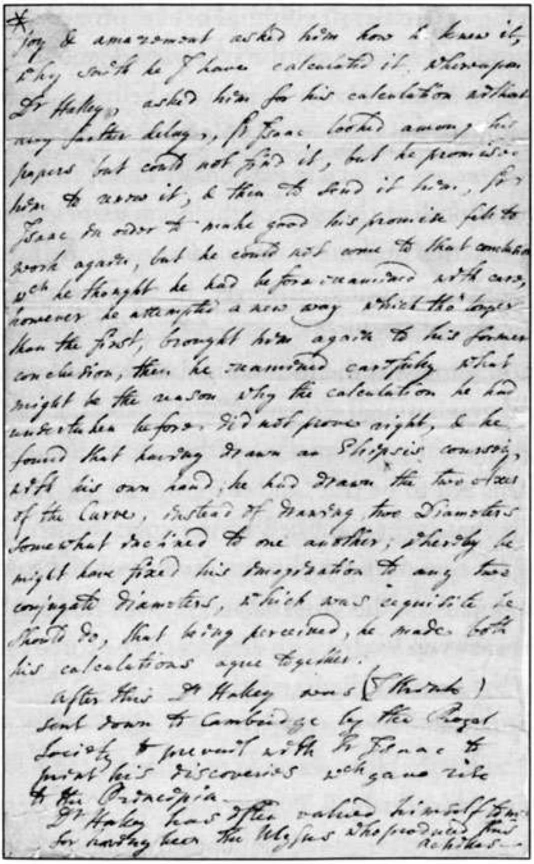


Hình 28

Principia

Halley tới thăm Newton ở Cambridge vào mùa xuân hoặc mùa hè năm 1684. Thỉnh thoảng Halley có bàn luận về các định luật Kepler về chuyển động của các hành tinh với Hooke và với kiến trúc sư nổi tiếng Christopher Wren (11632-1723). Trong những buổi trò chuyện ở quán cà phê này, cả Hooke và Wren đều tuyên bố là đã suy ra định luật nghịch đảo-bình phương của hấp dẫn từ vài năm trước, nhưng cả hai đều không thể xây dựng được một lý thuyết toán học hoàn chỉnh từ sự suy luận này. Halley đã quyết định hỏi Newton một vấn đề quan trọng: Ông có biết hình dạng quỹ đạo của một hành tinh chịu tác dụng của một lực hấp dẫn thay đổi theo quy luật nghịch đảo-bình phương khoảng cách là gì không? Trước sự kinh ngạc của Halley, Newton đã trả lời rằng ông đã chứng minh từ mấy năm trước rằng quỹ đạo đó là một hình elíp. Nhà toán học Abraham Moivre (1667-1754) kể câu chuyện này trong một bản ghi nhớ (trích từ trang được in lại ở hình 29):

> Vào năm 1684, TS. Halley đã đến thăm ông [Newton] ở Cambridge sau khi họ đã gặp nhau vài lần, vị TS. này đã hỏi Newton rằng ông nghĩ đường cong tạo bởi các hành tinh sẽ như thế nào nếu như lực hút về phía Mặt trời tỷ lệ nghịch với bình phương khoảng cách đến nó. Ngài Isaac đã đáp lại ngay lập tức rằng nó phải là một hình elíp, vị TS sững sờ vì vui mừng và kinh ngạc đã hỏi ông làm thế nào mà biết được điều đó, ông trả lời rằng tôi đã tính toán ra như thế, ngay lập tức TS. Halley lại hỏi tính toán thế nào, Ngài Isaac tìm kiếm một hồi trong đống giấy tờ



joy & amazement asked him how he knew it,
why saith he I have calculated it, whereupon
Dr Halley asked him for his calculation without
any farther delay, Sr Isaac looked among his
papers but could not find it, but he promised
him to renew it, & then to send it him, Sr
Isaac in order to make good his promise fell to
work again, but he could not come to that conclusion
wch he thought he had before examined with care,
however he attempted a new way which tho' longer
than the first, brought him again to his former
conclusion, then he examined carefully what
might be the reason why the calculation he had
undertaken before did not prove right, & he
found that having drawn an Ellipsis coursorily
with his own hand, he had drawn the two Axes
of the Curve, instead of drawing two Diameters
somewhat inclined to one another; whereby he
might have fixed his imagination to any two
conjugate Diameters, which was requisite he
should do, that being perceived, he made both
his calculations agree together.
After this Dr Halley was (I think)
sent down to Cambridge by the Royal
Society to prevail with Sr Isaac to
print his discoveries wch gave rise
to the Principia.
Dr Halley has often valued himself [illegible]
for having been the Ulysses who produced this
Achilles.

Hình 29

của mình nhưng không tìm ra, bèn hứa là ông sẽ viết lại rồi gửi cho sau.

Halley thực tế đã đến thăm Newton một lần nữa vào tháng 11 năm 1684. Giữa hai lần tới thăm đó, Newton đã làm việc điên cuồng. De Moivre đã mô tả tóm lược cho chúng ta thấy:

> Để giữ lời hứa của mình, Ngài Isaac đã làm việc cật lực lần nữa, song ông không thể đi đến kết luận mà ông nghĩ là đã xem xét rất cẩn thận trước đó, tuy nhiên ông bèn thử một cách khác, mất thời gian hơn lần đầu, và đã mang lại kết quả như cũ, sau đó ông đã nghiên cứu kỹ lưỡng lý do tại sao những tính toán mà ông đã tiến hành trước đó lại tỏ ra không đúng, và... ông đã làm cho hai tính toán đó của mình phù hợp với nhau.

Bản tóm tắt khô khan này thậm chí còn chưa nói cho chúng ta biết điều mà Newton đã thực sự hoàn thành trong thời gian vài tháng giữa hai lần tới thăm của Halley. Ông đã viết toàn bộ một chuyên luận, *De Motu Corporum in Gyrum* (*Chuyển động của các vật thể quay)*, mà trong đó, ông đã chứng minh hầu hết mọi khía cạnh của các vật thể quay theo quỹ đạo tròn hoặc êlíp, chứng minh tất cả các định luật của Kepler và thậm chí còn giải quyết cả chuyển động của một hạt trong môi trường có lực cản (như không khí, chẳng hạn). Halley đã rất choáng ngợp. Với sự thỏa mãn của mình, ít nhất là ông đã cố gắng thuyết phục Newton cho xuất bản tất cả những khám phá thực sự kinh ngạc này - và *Principia* cuối cùng cũng sắp sửa xuất hiện.

Ban đầu, Newton xem cuốn sách này chẳng qua chỉ là một phiên bản phần nào chi tiết hơn và mở rộng hơn chuyên luận *De Motu* của mình thôi. Tuy nhiên, khi bắt tay vào viết thì ông nhận ra rằng một số chủ đề cần được suy nghĩ kỹ hơn. Đặc biệt là hai điểm vẫn khiến Newton phải trăn trở. Một là: Newton ban đầu phát biểu định luật của mình về lực hấp dẫn trong trường hợp Mặt trời, Trái đất và các hành tinh được coi là các chất điểm toán học, không có kích thước. Tất nhiên, ông biết điều đó là không đúng, do đó ông xem kết quả của mình chỉ là gần đúng khi áp dụng cho hệ Mặt trời. Một số người thậm chí còn đoán rằng ông đã từ bỏ một lần nữa việc theo đuổi chủ đề về hấp dẫn sau năm 1679 là bởi vì ông không thỏa mãn về hiện trạng của vấn đề. Tình hình liên quan đến lực tác dụng lên quả táo thậm chí còn tồi tệ hơn. Rõ ràng là phần Trái đất nằm ngay dưới quả táo thì có khoảng cách ngắn hơn nhiều so với phần ở phía bên kia của Trái đất. Vậy thì làm thế nào có thể tính được lực hấp dẫn tổng hợp? Nhà thiên văn Herbert Hall Turner (1861-1930) đã mô tả sự đấu tranh trong tư tưởng của Newton trong một bài báo đăng trên tờ *Times* ở London vào ngày 19 tháng 3 năm 1927.

> Vào thời gian đó, ý tưởng chung về một lực hút thay đổi tỷ lệ nghịch với bình phương khoảng cách đã xuất hiện trong đầu ông, song ông đã nhìn thấy những khó khăn nghiêm trọng ở sự áp dụng của nó một cách hoàn chỉnh mà những trí tuệ kém hơn không ý thức được... Ông đã không vượt qua được điều quan trọng nhất cho mãi đến năm 1685... Đó là sự liên kết giữa sức hút của Trái đất lên một vật thể ở rất xa như Mặt trăng với sức hút lên quả táo ở rất gần bề mặt của nó. Trong trường hợp trước, các hạt khác nhau tạo nên Trái đất (Newton hy vọng sẽ mở rộng định luật này cho các hạt đó một cách riêng rẽ, và điều đó làm cho định luật có tính phổ quát) có khoảng cách đến Mặt trăng không khác nhau quá nhiều cả về độ

> lớn lẫn về hướng; song khoảng cách của chúng tới quả táo thì lại khác nhau rất dễ thấy ở cả về độ lớn lẫn về hướng. Vậy trong trường hợp thứ hai, làm thế nào có thể cộng được các lực hút riêng rẽ thành một lực tổng hợp đơn nhất? Và những lực riêng rẽ ấy có thể tập trung ở cái "trọng tâm" nào, nếu có?

Sự đột phá cuối cùng đã đến vào mùa xuân năm 1685. Newton đã cố gắng chứng minh một định lý quan trọng: Với hai vật thể hình cầu, "tổng lực mà vật này hút vật kia sẽ tỷ lệ nghịch với bình phương khoảng cách giữa tâm của chúng". Điều đó có nghĩa là, các vật thể hình cầu cũng hấp dẫn nhau như thể chúng là các chất điểm tập trung tại tâm của chúng. Tầm quan trọng của chứng minh đẹp đẽ này đã được nhà toán học James Whitbread Lee Glaisher (1848-1928) nhấn mạnh. Trong bài phát biểu của mình tại lễ kỷ niệm hai trăm năm ra đời cuốn *Principia* của Newton (năm 1887), Glaisher đã nói:

> Trước khi toàn bộ cơ chế của vũ trụ lập tức phơi bày trước mắt ông, Newton đã chứng minh được định lý tuyệt vời này - và chúng ta biết từ chính lời ông nói rằng ông không hề chờ đợi có được một kết quả đẹp đẽ như vậy cho tới khi nó hiện ra từ nghiên cứu toán học của ông... Những mệnh đề này có lẽ sẽ khác biết bao dưới con mắt của Newton khi ông nhận ra rằng các kết quả, mà ông tin là chỉ gần đúng khi áp dụng vào hệ Mặt trời, hóa ra lại thực sự là chính xác!... Chúng ta có thể tưởng tượng được tác dụng của sự chuyển tiếp đột ngột này từ chỗ

> gần đúng thành chính xác đối với việc kích thích trí óc của Newton có những nỗ lực còn lớn lao hơn. Chính lúc này trong năng lực của ông là lúc áp dụng giải tích toán với sự chính xác tuyệt đối vào những vấn đề thực sự của thiên văn học.

Điểm thứ hai rõ ràng vẫn khiến Newton trăn trở khi ông viết bản thảo ban đầu của cuốn *De Motu,* là thực tế rằng ông đã bỏ qua ảnh hưởng của các lực mà các hành tinh hấp dẫn Mặt trời. Nói cách khác, trong dự thảo ban đầu của mình, ông đã quy Mặt trời về chỉ còn là một tâm lực không chuyển động thuộc loại, mà theo lời của Newton, là "khó có thể tồn tại" trong thế giới thực. Sự quy giản này mâu thuẫn với định luật thứ 3 của chính Newton về chuyển động, mà theo đó "tác dụng của các vật hút và bị hút luôn là tương hỗ và có cùng độ lớn". Mỗi hành tinh hút Mặt trời với một lực đúng bằng lực mà Mặt trời hút hành tinh. Do đó, ông nói thêm: "nếu có hai vật [như Trái đất và Mặt trời], không hút cũng không bị hút thì mới có thể đứng yên". Sự thừa nhận có vẻ như không quan trọng này thực sự lại là một bàn đạp quan trọng hướng tới khái niệm vạn vật hấp dẫn. Chúng ta có thể thử phỏng đoán dòng tư duy của Newton: Nếu Mặt trời đẩy Trái đất, thì Trái đất cũng sẽ phải đẩy Mặt trời với cùng độ lớn. Như vậy, Trái đất sẽ không chỉ đơn giản quay xung quanh Mặt trời mà đúng hơn là cả hai cùng quay xung quanh một trọng tâm chung. Nhưng đó chưa phải là tất cả. Tất cả những hành tinh khác cũng đều hút Mặt trời và thực sự thì mỗi hành tinh cũng nhận được sức hút không chỉ từ Mặt trời, mà còn từ các hành tinh khác. Cùng kiểu lôgic như vậy có thể áp dụng cho Mộc tinh và các vệ tinh của nó, với Trái đất và Mặt trăng, và thậm chí với một quả táo và Trái đất.

Và kết luận này là rất đáng kinh ngạc ở sự đơn giản của nó: *chỉ có một lực hấp dẫn, và nó tác dụng giữa hai khối lượng, ở bất kỳ đâu trong vũ trụ*. Đó là tất cả những gì Newton đã bổ sung. Cuốn *Principia* với 510 trang dày đặc chữ Latinh - đã được xuất bản vào tháng 7 năm 1687.

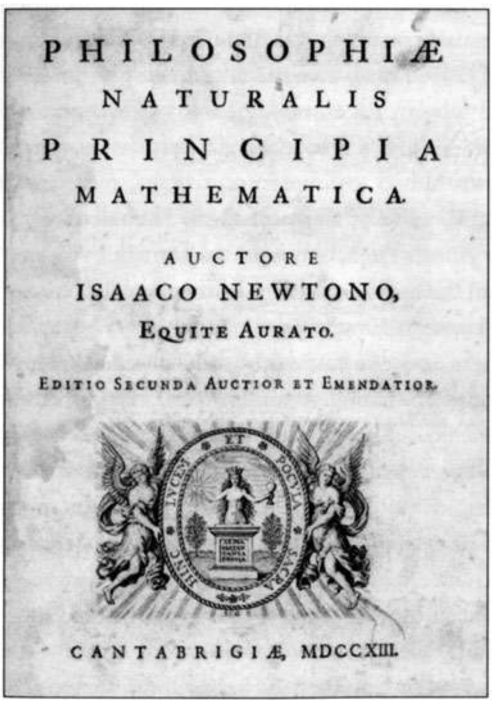
Newton đã tiến hành quan sát và thực nghiệm với độ chính xác chỉ khoảng 4%, thế mà dựa vào đó ông đã thiết lập được một định luật toán học về hấp dẫn có độ chính xác còn hơn 1 phần triệu. Lần đầu tiên ông đã thống nhất được *những giải thích* về các hiện tượng tự nhiên với sức mạnh *tiên đoán* của các kết quả quan sát. Vật lý và toán học đã mãi mãi trở nên gắn bó mật thiết với nhau, trong khi sự chia tay của khoa học và triết học lại trở nên là điều không thể tránh khỏi.

Lần xuất bản thứ hai của *Principia*, được biên tập lại toàn diện bởi Newton và đặc biệt là bởi nhà toán học Roger Cotes (1682-1716), là vào năm 1713 (hình 30 là trang bìa của lần tái bản này). Newton, người chưa bao giờ bày tỏ thiện cảm với ai, thậm chí trong lời nói đầu của cuốn sách còn không buồn cảm ơn Cotes đối với công việc biên tập quá ư nặng nhọc của ông này. Dù vậy, khi Cotes qua đời vì bị sốt cao ở tuổi 33, Newton cũng có bày tỏ một chút cảm kích: "Nếu ông ấy còn sống thì chúng ta chắc sẽ biết thêm được điều gì đó".

Điều hơi lạ là một số nhận xét đáng nhớ nhất của Newton về Thượng đế chỉ xuất hiện như là ý nghĩ sau này trong lần xuất bản thứ hai. Trong một bức thư gửi cho Cotes vào ngày 28 tháng 3 năm 1713, chưa đầy 3 tháng trước khi hoàn thành lần xuất bản thứ hai của *Principia*, Newton đã thêm vào câu sau: "Bàn về Thượng đế từ các hiện tượng [của tự nhiên] chắc chắn là thuộc về triết học tự nhiên". Thực sự thì Newton đã bày tỏ ý tưởng của mình về một

Thượng đế “vĩnh cửu và vô hạn, có quyền năng tuyệt đối và toàn trí” trong “Phần chú giải chung” - phần mà ông xem như là chi tiết hoàn tất cuối cùng đối với *Principia*.

Nhưng liệu vai trò của Thượng đế có còn không thay đổi trong cái thế giới toán học ngày càng tăng trưởng này? Hay Thượng đế ngày càng được cảm nhận như là một nhà toán học? Xét cho cùng, cho đến trước khi ra đời định luật về hấp dẫn, thì chuyển động của các hành tinh được coi như là một trong những tác phẩm không hề sai sót của Thượng đế. Vậy Newton và Descartes đã nhìn nhận sự dịch chuyển này như thế nào trong sự nhấn mạnh tới những giải thích khoa học về tự nhiên?


PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.
AUCTORE
ISAACO NEWTONO,
EQUITE AURATO.
EDITIO SECUNDA AUCTIOR ET EMENDATIOR.
CANTABRIGIÆ, MDCCXIII.

Hình 30

Nhà toán học Thượng đế của Newton và Descartes

Như hầu hết mọi người trong thời đại của họ, cả Newton và Descartes đều là những người theo đạo. Nhà văn người Pháp được biết đến với bút danh Voltaire (1694-1778), người đã viết khá bao quát về Newton, đã nói một câu nổi tiếng rằng "nếu Thượng đế không tồn tại thì chúng ta cần phát minh ra Ngài".

Đối với Newton, chính sự tồn tại của thế giới này và tính có quy luật toán học của vũ trụ quan sát được chính là bằng chứng về sự hiện diện của Thượng đế. Dạng lý luận nhân quả này lần đầu tiên được sử dụng bởi nhà thần học Thomas Aquinas (khoảng 1225-1274), và những lập luận này được xếp vào loại triết học chung với cái nhãn là *lập luận vũ trụ học* và *lập luận mục đích luận*. Nói một cách đơn giản, lập luận vũ trụ học cho rằng vì thế giới vật lý bằng cách nào đó phải đi đến sự tồn tại nên phải có một Nguyên nhân Ban đầu, mà cụ thể đó là Đấng sáng tạo. Lập luận mục đích luận, hay *lập luận từ bản thiết kế*, cố gắng đưa ra bằng chứng về sự tồn tại của Thượng đế từ bản thiết kế rõ ràng của thế giới. Đây là những tư tưởng của Newton, được trình bày trong cuốn *Principia*: "Hệ thống đẹp nhất của Mặt trời, các hành tinh và sao chổi, chỉ có thể xuất phát từ sự chỉ giáo và chi phối của một Đấng trí tuệ và đầy quyền năng. Và nếu các ngôi sao cố định là tâm của những hệ thống khác tương tự thì chúng, được tạo bởi sự chỉ giáo sáng suốt, cũng phải chịu sự chi phối của Ngài." Giá trị của những lập luận vũ trụ học, mục đích luận hay những thứ tương tự như là chứng minh cho sự tồn tại của Thượng đế đã từng là chủ đề tranh cãi giữa các nhà triết học trong nhiều thế kỷ. Ấn tượng của cá nhân tôi luôn là: những người theo chủ nghĩa hữu thần thì không cần những lập luận này để tin còn những người vô thần thì không hề bị thuyết phục bởi những lập luận đó.

Newton đã bổ sung thêm một nút xoắn nữa, dựa trên tính phổ quát của các định luật của ông. Thực tế là toàn bộ vũ trụ bị chi phối bởi cùng một số các định luật và dường như rất ổn định cũng được ông coi là một bằng chứng nữa về bàn tay dẫn dắt của Thượng đế, "đặc biệt là vì ánh sáng của các ngôi sao cố định có *cùng bản chất* [nhấn mạnh của tác giả] với ánh sáng của Mặt trời, và từ mỗi hệ thống ánh sáng đi vào tất cả các hệ thống khác: và để cho các hệ thống những ngôi sao cố định không rơi vào nhau, do lực hấp dẫn của chúng, Ngài phải đặt các hệ thống ở cách nhau những khoảng cách rất lớn".

Trong cuốn *Quang học* của ông, Newton đã nói một cách rõ ràng rằng ông không tin các định luật của tự nhiên tự chúng đã đủ để giải thích sự tồn tại của vũ trụ - Thượng đế là một đấng sáng tạo và duy trì mọi nguyên tử tạo nên vật chất vũ trụ: "Chính là Ngài [Thượng đế] đã tạo nên chúng [nguyên tử] để sắp đặt chúng theo trật tự. Và nếu Ngài làm như vậy, thì sẽ là phi triết học nếu đi tìm kiếm bất kỳ Nguồn gốc nào khác của Thế giới, hay giả vờ rằng nó được tạo ra từ Hỗn mang chỉ nhờ vào các Định luật của Tự nhiên". Nói cách khác, với Newton, Thượng đế là một nhà toán học (trong số những điều khác nữa), không phải theo ý nghĩa tu từ mà là theo nghĩa đen - Thượng đế đấng sáng tạo đã mang đến sự tồn tại cho thế giới vật lý, một thể giới được chi phối bởi các định luật toán học.

Có thiên hướng triết học hơn nhiều so với Newton, Descartes cực kỳ bận tâm đến việc chứng minh sự tồn tại của Thượng đế. Với ông, con đường từ sự chắc chắn ở sự tồn tại của chính chúng ta (“Tôi tư duy nghĩa là tôi tồn tại”) tới khả năng của chúng ta trong việc dệt nên một tấm thảm của khoa học khách quan phải đi qua một chứng minh không thể bác bỏ về sự tồn tại của một Thượng đế cực kỳ hoàn hảo. Ông cho rằng Thượng đế này là một nguồn tối hậu của tất cả mọi chân lý và là người đảm bảo duy nhất cho độ tin cậy của lý luận của con người. Lập luận lòng vòng mập mờ này (được gọi là *vòng tròn Descartes*) đã bị chỉ trích ngay ở thời Descartes, đặc biệt là nhà triết học, thần học và toán học người Pháp Antoine Arnauld (1612-94). Arnauld đã đặt ra một câu hỏi có tính hủy diệt ngay trong sự đơn giản của nó: Nếu chúng ta cần chứng minh sự tồn tại của Thượng đế bảo đảm hiệu lực của quá trình tư duy của con người, vậy thì làm thế nào chúng ta có thể tin được sự chứng minh ấy khi mà bản thân nó là một sản phẩm của trí tuệ con người? Trong khi Descartes đã cố gắng tuyệt vọng để thoát khỏi cái vòng tròn lý luận luẩn quẩn này, thì rất nhiều nhà triết học đi theo ông cũng không nhận thấy những nỗ lực của ông là có sức thuyết phục. “Chứng minh phụ thêm” của Descartes về sự tồn tại của Thượng đế cũng đáng nghi vấn không kém. Nó được xếp vào loại triết học chung có tên là *lập luận bản thể học.* Nhà thần học triết học St. Anselm ở Canterbury (1033-1109) lần đầu tiên đưa ra kiểu lập luận này vào năm 1078 và kể từ đó nó đã nổi lên dưới nhiều hình thức. Kết cấu lôgic này đại khái như sau: Thượng đế, theo định nghĩa, là hoàn hảo tới mức Ngài là đấng vĩ đại nhất có thể tưởng tượng được. Nhưng nếu Thượng đế không tồn tại thì có thể tưởng tượng được một đấng còn vĩ đại hơn - người mà ngoài sự may mắn là có được sự hoàn hảo của Thượng đế ra cũng còn tồn tại nữa. Điều này mâu thuẫn với định nghĩa của Thượng đế là một đấng vĩ đại nhất có thể tưởng tượng được - do đó Thượng đế phải tồn tại. Theo lời Descartes thì: "Sự tồn tại có thể tách rời bản chất của Thượng đế thì cũng không hơn gì thực tế là các góc của một tam giác bằng hai góc vuông có thể tách rời khỏi bản chất của một tam giác".

Kiểu lươn lẹo lôgic này không thuyết phục được nhiều nhà triết học, và họ cho rằng để chứng minh được sự tồn tại của bất kỳ điều gì là hệ quả lôgic trong thế giới vật lý, và đặc biệt điều đó lại vĩ đại như là Thượng đế, thì lôgic không thôi là chưa đủ.

Kỳ lạ nữa là, Descartes lại bị kết tội là cổ vũ cho thuyết vô thần và các tác phẩm của ông bị liệt vào danh mục các cuốn sách bị cấm của Giáo hội Cơ đốc vào năm 1667. Đây quả là một sự phán xét kỳ cục trước sự khăng khăng của Descartes về sự tồn tại của Chúa như là một người đảm bảo tối thượng của chân lý.

Gạt sang một bên những vấn đề triết học thuần túy, đối với mục đích hiện tại của chúng ta, điều thú vị nhất trong quan điểm của Descartes là cho rằng Thượng đế sáng tạo ra tất cả "các chân lý vĩnh cửu". Đặc biệt, ông tuyên bố rằng "những chân lý toán học mà bạn coi là vĩnh cửu đã được thiết lập bởi Thượng đế và phụ thuộc vào Ngài hoàn toàn không kém gì phần còn lại của những gì Người sáng tạo ra". Vì vậy mà Thượng đế theo học thuyết của Descartes còn hơn cả một nhà toán học, theo nghĩa là người sáng tạo ra cả toán học và thế giới vật lý, một thế giới lại hoàn toàn dựa vào toán học. Theo thế giới quan này, một thế giới quan thịnh hành vào cuối thế kỷ 17, thì loài người rõ ràng là chỉ *khám phá* ra toán học chứ không phải là phát minh ra nó.

Đáng kể hơn là, các tác phẩm của Galileo, Descartes và Newton đã làm thay đổi mối quan hệ giữa toán học và khoa học theo một cách rất sâu sắc. Trước tiên, sự phát triển bùng nổ trong khoa học đã trở thành những động lực mạnh mẽ thúc đẩy những nghiên cứu toán học. Thứ hai, thông qua các định luật của Newton, ngày càng có nhiều lĩnh vực toán học thậm chí trừu tượng hơn, như giải tích, đã trở thành *cốt lõi* của những giải thích vật lý. Cuối cùng và có lẽ là quan trọng nhất, ranh giới giữa toán học và khoa học đã trở nên mờ nhạt khó có thể nhận ra, hầu như tới mức hợp nhất hoàn toàn giữa những nhận thức toán học sâu xa và những khu vực thám hiểm rộng lớn. Tất cả sự phát triển này đã tạo nên sự hứng khởi cao độ đối với toán học mà có lẽ người ta không được chứng kiến kể từ thời Hy Lạp cổ đại. Các nhà toán học cảm thấy rằng thế giới chính là dành cho họ chinh phục và nó cũng gợi mở cho họ những tiềm năng vô hạn để khám phá.

CHƯƠNG 5

CÁC NHÀ THỐNG KẾ VÀ XÁC SUẤT: KHOA HỌC CỦA SỰ BẤT ĐỊNH

Thế giới không đứng yên. Hầu hết mọi thứ chung quanh chúng ta hoặc là chuyển động hoặc thay đổi không ngừng. Ngay cả Trái đất có vẻ vững chắc dưới chân chúng ta trong thực tế cũng quay xung quanh trục của nó, quay xung quanh Mặt trời và du hành (cùng với Mặt trời) xung quanh tâm của Dải Ngân Hà - thiên hà của chúng ta. Không khí mà chúng ta hít thở được tạo bởi hàng ngàn tỉ các phân tử chuyển động hỗn loạn, không ngừng. Đồng thời, cây cỏ tăng trưởng, các chất phóng xạ thì phân rã, nhiệt độ không khí thì lúc tăng lúc giảm mỗi ngày và theo mùa, và sự kỳ vọng vào cuộc sống con người cũng luôn tăng lên. Tuy nhiên, bản thân sự không ngừng nghỉ này của vũ trụ lại không gây khó dễ gì cho toán học. Nhánh toán học được gọi là *giải tích* do Newton và Leibniz phát minh ra cho phép phân tích một cách chặt chẽ và mô hình hóa một cách chính xác về cả chuyển động và thay đổi. Đến nay, công cụ tuyệt vời này trở nên rất hữu hiệu và bao hàm tất cả đến mức nó có thể được sử dụng để xem xét những vấn đề rất khác nhau như chuyển động của tàu con thoi không gian hoặc sự truyền lan của căn bệnh truyền nhiễm. Giống như một bộ phim có thể nắm bắt được chuyển động bằng cách tách nó thành một chuỗi các khuôn hình liên tiếp nhau, giải tích cũng có thể tính toán được sự thay đổi trên một mạng lưới tinh vi đến mức nó cho phép xác định được các đại lượng chỉ tồn tại thoáng qua như tốc độ tức thời, gia tốc tức thời hoặc tốc độ thay đổi tức thời.

Tiếp tục những bước chân khổng lồ của Newton và Leibniz, các nhà toán học ở Kỷ nguyên Lý trí (cuối thế kỷ 17 và thế kỷ 18) đã phát triển giải tích thành một nhánh có khả năng ứng dụng mạnh mẽ và rộng lớn hơn - đó là nhánh *phương trình vi phân*. Được trang bị những vũ khí mới, các nhà khoa học giờ đây đã có thể trình bày các lý thuyết toán học chi tiết về các hiện tượng trải rộng từ âm nhạc tạo bởi một sợi dây đàn violon đến sự truyền nhiệt, từ chuyển động của con quay cho đến dòng chảy các chất lỏng và khí. Trong một thời gian ngắn, các phương trình vi phân đã trở thành công cụ được lựa chọn để tạo nên sự phát triển của vật lý học.

Một số nhà thám hiểm đầu tiên của vùng đất mới được mở ra bởi các phương trình vi phân là những thành viên của gia đình Bernoulli huyền thoại. Trong khoảng thời gian giữa thế kỷ 17 và giữa thế kỷ 19, gia đình này đã tạo ra không dưới 8 nhà toán học xuất chúng. Những cá nhân tài năng này cũng nổi tiếng về sự thù ghét cay đắng nhau trong nội bộ gia đình họ, hầu như cũng chẳng thua kém gì sự nổi tiếng của họ trong toán học. Trong khi sự bất hòa giữa những người trong gia đình Bernoulli luôn liên quan đến sự giành giật địa vị cao hơn trong toán học, thì một số vấn đề mà họ tranh cãi ngày nay dường như lại không phải là quan trọng nhất.

Dù vậy, lời giải cho những câu đố phức tạp đó thường lại mở đường cho những đột phá toán học ấn tượng hơn. Nhìn chung, không ai nghi ngờ gì về vai trò quan trọng của những người trong gia đình Bernoulli đối với việc đưa toán học trở thành ngôn ngữ của rất nhiều quá trình vật lý.

Một câu chuyện có thể minh họa cho sự phức tạp của hai trí tuệ ưu tú nhất của gia đình Bernoulli - hai anh em Jakob (1654-1705) và Johann (1667-1748). Jakob Bernoulli là một trong những người đi tiên phong của *lý thuyết xác suất,* và chúng ta sẽ còn quay trở lại với ông trong phần sau của chương này. Tuy nhiên, vào năm 1690, Jakob đang bận bịu với việc phục dựng lại một bài toán đã được người đàn ông tài hoa thời Phục Hưng là Leonardo da Vinci nghiên cứu lần đầu tiên hai thế kỷ trước: đó là bài toán tìm hình dạng của một sợi dây xích đàn hồi nhưng không giãn được treo vào hai điểm cố định (như trên H. 31). Leonardo đã phác thảo một vài sợi dây xích như vậy trong sổ ghi chép của mình. Bài toán này

Hình 31

cũng được giới thiệu với Descartes bởi người bạn của ông là Isaac Beeckman, song không có bằng chứng nào cho thấy Descartes đã thử giải nó. Cuối cùng thì bài toán này đã trở nên nổi tiếng với tên gọi là *bài toán catenary* (tiếng Latinh là *catena*, có nghĩa là "dây xích"). Galileo cho rằng hình dạng của sợi dây xích sẽ là parabol, nhưng đã được tu sĩ dòng Tên Ignatius Pardies (1636-73) chứng minh là sai. Tuy nhiên, Pardies đã không đi đến cùng trong việc giải thực sự bằng toán học để tìm ra hình dạng đúng.

Chỉ một năm sau khi Jakob Bernoulli đưa ra bài toán, em trai ông là Johann đã giải được nó (bằng một phương trình vi phân). Leibniz và nhà vật lý toán người Hà Lan Christiaan Huygens (1629-95) cũng giải được bài toán này nhưng lời giải của Huygens sử dụng một phương pháp hình học rối rắm hơn. Việc Johann giải được bài toán đã từng làm người anh và cũng là người thày của mình phải bối rối vẫn tiếp tục là nguồn vui to lớn cho Bernoulli em, ngay cả 13 năm sau khi Jakob qua đời. Trong một bức thư Johann viết vào ngày 29 tháng 9 năm 1718, gửi nhà toán học người Pháp Pierre Rémond de Montmort (1678-1719), ông không thể giấu được niềm vui sướng của mình:

> Ông nói anh trai tôi đã đặt ra bài toán này; điều đó đúng, nhưng liệu có suy ra rằng sau đó anh ấy đã giải được không? Hoàn toàn không. Khi anh ấy đưa ra bài toán này theo gợi ý của tôi (tôi mới là người đầu tiên nghĩ đến nó), thì không ai trong hai chúng tôi có thể giải được nó; chúng tôi đã hết hy vọng là nó có thể giải được, cho đến khi Leibniz công bố trên tạp chí Leipzig năm 1690, ở trang 360,

> rằng ông ấy đã giải được bài toán này nhưng không công bố lời giải của mình, mà để thời gian cho những nhà toán học khác và điều đó đã kích thích chúng tôi, cả anh trai tôi và tôi, thử giải lại một lần nữa.

Sau khi đã vơ lấy một cách không xấu hổ quyền sở hữu của ngay cả cái việc gợi ý đưa ra bài toán, Johann tiếp tục với niềm vui không che giấu:

> Những nỗ lực của anh trai tôi chẳng đem lại kết quả gì; về phần mình, tôi đã may mắn hơn, vì tôi đã tìm ra một kỹ thuật (tôi nói điều này không hề có một chút khoác lác nào, mà tại sao tôi lại phải che giấu sự thật cơ chứ?) cho phép giải được nó một cách trọn vẹn... Sự thật là tôi đã phải trả giá bằng một đêm thức trắng... nhưng sáng hôm sau, vô cùng sung sướng, tôi đã chạy đến tìm anh trai tôi, khi ấy anh vẫn còn đang đánh vật một cách khốn khổ với bài toán hóc búa mà chẳng đi đến đâu cả, vì anh luôn nghĩ giống Galileo rằng *catenary* phải là một parabol. Dừng lại đi! Dừng lại đi! Tôi nói với anh ấy, đừng hành hạ bản thân anh để cố chứng minh hình dạng của *catenary* là parabol thêm nữa, vì nó hoàn toàn sai rồi... Nhưng sau đó ông đã làm cho tôi phải ngạc nhiên khi kết luận rằng anh trai tôi đã tìm ra lời giải bài toán này... Tôi xin hỏi ông, ông có thực sự nghĩ rằng, nếu anh trai tôi đã giải được bài toán đó, thì liệu anh ấy có tử tế với tôi tới mức không xuất hiện giữa những người đã giải được nó, và nhường tôi vinh dự được xuất hiện một mình trên sân khấu với

danh hiệu là người đầu tiên, cùng với các ngài Huygens và Leibniz hay không?

Trong trường hợp nếu bạn cần một chứng minh rằng, xét cho cùng, các nhà toán học cũng là con người thì câu chuyện này đủ làm được điều đó. Tuy nhiên, sự ganh đua trong gia đình Bernoulli đã không lấy mất đi mảy may điều gì từ những thành tựu của gia đình ấy. Trong suốt những năm tiếp theo câu chuyện *catenary*, Jakob, Johann và Daniel Bernoulli (1700-1782) tiếp tục không chỉ giải được những bài toán khác tương tự về dây xích treo mà còn phát triển lý thuyết các phương trình vi phân nói chung và giải được bài toán về chuyển động của các vật phóng qua một môi trường có lực cản.

Câu chuyện về *catenary* còn chứng minh một khía cạnh khác về sức mạnh của toán học - ngay cả với những bài toán vật lý tưởng như tầm thường cũng có những lời giải toán học. Bản thân hình dạng của *catenary* cũng vậy, nó vẫn tiếp tục làm thích thú hàng triệu du khách viếng thăm Cổng vòm nổi tiếng ở St. Louis, Missouri. Kiến trúc sư người Mỹ gốc Phần Lan là Eero Saarinen (1910-61) và kỹ sư xây dựng người Mỹ gốc Đức là Haanskarl Bandel (1925-93) đã thiết kế cái cấu trúc mang tính biểu tượng này có hình dạng tương tự như hình *catenary* lộn ngược.

Sự thành công đáng kinh ngạc của khoa học vật lý trong việc khám phá ra các định luật toán học chi phối hành vi của vũ trụ ở quy mô lớn đã không tránh khỏi làm nảy sinh câu hỏi, đó là liệu các nguyên lý tương tự cũng có nằm ẩn sau các quá trình sinh học, xã hội hoặc kinh tế hay không. Các nhà toán học cũng băn khoăn tự hỏi liệu toán học chỉ là ngôn ngữ của tự nhiên thôi hay nó cũng còn là ngôn ngữ của bản chất con người? Ngay cả nếu những nguyên lý phổ quát thực sự không tồn tại thì liệu các công cụ toán học, tối thiểu nhất, có được sử dụng để lập mô hình và rồi sau đó giải thích được các hành vi xã hội hay không? Trước hết, nhiều nhà toán học hoàn toàn bị thuyết phục rằng "các định luật" dựa trên một kiểu tính toán nào đó, cũng đều có thể tiên đoán được chính xác tất cả các sự kiện trong tương lai, dù lớn hay nhỏ. Chẳng hạn, đó là ý kiến của nhà vật lý toán vĩ đại Pierre-Simon de Laplace (1749-1827). Năm tập của bộ *Mécanique céleste (Cơ học thiên thể)* của Laplace đã đưa ra lời giải thực sự hoàn chỉnh (nếu gần đúng) đầu tiên về các chuyển động của hệ Mặt trời. Thêm vào đó, Laplace còn là người đã trả lời được câu hỏi khiến ngay cả người khổng lồ như Newton cũng bối rối: Tại sao hệ Mặt trời lại ổn định như vậy? Newton cho rằng do sức hút qua lại lẫn nhau giữa các hành tinh nên chúng sẽ phải bị rơi vào Mặt trời hoặc bay ra xa vào không gian, và vì thế ông đã phải viện đến bàn tay của Chúa để giữ cho hệ Mặt trời được nguyên vẹn. Laplace lại có quan điểm khác. Thay vì dựa vào bàn tay của Chúa, ông đã chứng minh đơn giản bằng toán học rằng hệ Mặt trời ổn định trong khoảng thời gian còn dài hơn cả dự đoán của Newton. Để giải quyết vấn đề phức tạp này, Laplace đã đưa ra một hình thức luận toán học khác được gọi là *lý thuyết nhiễu loạn*, cho phép ông có thể tính toán hiệu ứng lũy tích của nhiều sự nhiễu loạn nhỏ lên quỹ đạo của mỗi hành tinh. Cuối cùng, đỉnh cao của nó là Laplace đã đưa ra một trong những mô hình đầu tiên về chính nguồn gốc của hệ Mặt trời - trong *giả thuyết tinh vân* rất có ảnh hưởng của ông, hệ

Mặt trời được tạo ra từ một tinh vân khí bị co lại.

Với tất cả những chiến công ấn tượng này, có lẽ sẽ không có gì phải ngạc nhiên khi trong cuốn *Tiểu luận triết học về xác suất*, Laplace đã tuyên bố một cách táo bạo:

> Tất cả những sự kiện, ngay cả những sự kiện mà xét về tính quan trọng của chúng không tuân theo các quy luật vĩ đại của tự nhiên, cũng là một kết quả của nó, một cách tất yếu như sự sự quay của Mặt trời vậy. Bỏ qua sự ràng buộc gắn kết các sự kiện như vậy với toàn bộ hệ thống vũ trụ, chúng được hình thành tùy thuộc vào các nguyên nhân cuối cùng hoặc vào sự ngẫu nhiên... Khi đó, chúng ta phải coi trạng thái hiện tại của vũ trụ như là kết quả của trạng thái trước đó và là nguyên nhân của trạng thái tiếp sau. Tại một thời điểm đã cho, một trí tuệ có thể thấu hiểu được tất cả các lực tác dụng trong tự nhiên và những trạng thái tương ứng của mọi thứ cấu tạo nên tự nhiên - một trí tuệ đủ lớn để có thể đưa những dữ liệu này vào phân tích - thì nó sẽ thâu tóm được trong cùng một công thức những chuyển động của các thiên thể lớn nhất trong vũ trụ cũng như những nguyên tử nhỏ bé nhất; đối với trí tuệ ấy thì không có gì là bất định và tương lai, cũng như quá khứ, sẽ chỉ là hiện tại trong mắt nó. Trí óc con người, trong sự hoàn hảo mà nó có thể mang lại cho thiên văn học, chỉ đưa ra được một ý niệm yếu ớt về trí tuệ này.

Nếu bạn muốn biết thì khi Laplace nói về cái "trí tuệ" tối thượng giả thuyết này, ông không hề ám chỉ tới Thượng đế. Không giống như Newton và Descartes, Laplace không phải là một người theo đạo. Khi được Laplace đưa tặng cuốn *Cơ học thiên thể*, Napoleon Bonaparte đã nhận xét: "Ông Laplace, người ta nói với ta là ông đã viết cuốn sách đồ sộ này về hệ thống vũ trụ mà không hề nhắc đến người sáng tạo ra nó". Laplace ngay lập tức đáp lại: "Tâu bệ hạ, thần không cần dùng đến giả thiết đó". Napoleon đã thích thú kể với nhà toán học Joseph-Louis Lagrange về câu trả lời của Laplace, và ông này đã kêu lên: "Chà! Đó là một giả thiết tuyệt đẹp; nó giải thích được rất nhiều điều". Nhưng câu chuyện không kết thúc ở đó. Khi nghe về phản ứng của Lagrance, Laplace đã bình luận một cách lạnh nhạt rằng: "Thưa ngài, giả thiết đó đúng là giải thích được tất cả mọi thứ, nhưng nó không cho phép tiên đoán được bất kỳ điều gì. Là một học giả, tôi phải cung cấp cho ngài những công cụ cho phép đưa ra những tiên đoán".

Sự phát triển của cơ học lượng tử ở thế kỷ 20 - lý thuyết về thế giới hạ nguyên tử - đã chứng minh rằng kỳ vọng về một vũ trụ hoàn toàn tất định là quá ư lạc quan. Thực tế, vật lý học hiện đại đã chứng minh rằng không thể tiên đoán được kết cục của mọi thí nghiệm, thậm chí là chỉ về nguyên tắc. Mà thay vì, lý thuyết chỉ có thể tiên đoán được xác suất của các kết quả khác nhau. Tình hình trong khoa học xã hội thậm chí còn phức tạp hơn bởi vô số những yếu tố đan bện chằng chịt với nhau, mà nhiều yếu tố trong số đó còn vô cùng bất định. Các nhà nghiên cứu ở thế kỷ 17 đã nhận ra đủ sớm rằng việc tìm kiếm các nguyên lý xã hội phổ quát và chính xác kiểu như định luật hấp dẫn của Newton đã bị thất bại ngay từ đầu. Dường như khi tính phức tạp của bản chất con người được đưa vào các phương trình, thì những tiên đoán tin cậy gần như trở nên không thể. Tình hình thậm chí có vẻ như vô vọng hơn khi liên quan đến trí tuệ của toàn bộ dân chúng. Tuy nhiên, thay vì tuyệt vọng, một vài nhà tư tưởng thiên tài đã tạo ra một kho các công cụ toán học mới - đó là *lý thuyết xác suất* và *thống kê.*

Những tỷ lệ ngoài cái chết và thuế

Nhà tiểu thuyết người Anh Daniel Defoe (1660-1731), nổi tiếng nhất với câu chuyện phiêu lưu của ông về *Robinson Crusoe,* cũng là tác giả của cuốn sách về siêu nhiên nhan đề *Lịch sử chính trị của Quỷ*. Trong đó, Defoe, người đã nhìn thấy bằng chứng về những hành động của quỷ ở khắp mọi nơi, đã viết: "Những điều chắc chắn như tử vong và thuế, có thể tin được một cách vững chắc hơn". Benjamin Franklin (1706-90) dường như cũng tán thành quan điểm tương tự về khía cạnh chắc chắn. Trong một bức thư ông viết ở tuổi 83 cho nhà vật lý người Pháp Jean-Baptise Leroy, ông đã nói: "Hiến pháp của chúng tôi đang thực sự được thực hiện. Mọi điều dường như hứa hẹn rằng nó sẽ kéo dài mãi mãi; nhưng trong thế giới này, không gì có thể chắc chắn ngoài cái chết và thuế." Thực sự thì quãng đời của chúng ta dường như không thể tiên đoán được, có thể xảy ra thiên tai, dễ mắc sai lầm rất con người và bị ảnh hưởng bởi những tình huống hoàn toàn ngẫu nhiên. Những cụm từ như "[........] xảy ra" được chế ra để biểu thị một cách chính xác sự dễ tổn thương của chúng ta trước những điều không ngờ tới và sự không có khả năng kiểm soát may rủi của chúng ta. Mặc cho những trở ngại đó, và có thể thậm chí là vì những thách thức này mà các nhà toán học, khoa học xã hội và sinh học từ thế kỷ 16 đã dấn thân vào những nỗ lực nghiêm túc để giải quyết những vấn đề bất định một cách có phương pháp. Tiếp theo việc thiết lập nên lĩnh vực cơ học thống kê, và đối mặt với nhận thức rằng chính những nền tảng của vật lý học - dưới dạng cơ học lượng tử - lại dựa trên sự bất định, các nhà vật lý thế kỷ 20 và 21 đã hăng hái tham gia vào trận chiến này. Vũ khí mà các nhà nghiên cứu sử dụng để chiến đấu với sự thiếu vắng quyết định luận chính xác là khả năng tính toán tỷ lệ (xác suất) của một kết cục cụ thể. Do không thể thực sự tiên đoán được một kết quả cụ thể, việc tính toán khả năng xuất hiện của những kết quả khác nhau là lựa chọn tốt nhất tiếp theo. Công cụ được tạo ra để cải thiện việc phỏng đoán đơn giản - đó là lý thuyết xác suất và thống kê - đã cung cấp một nền móng không chỉ của nhiều ngành khoa học hiện đại mà còn của cả một phạm vi rộng lớn các hoạt động xã hội, từ kinh tế học đến thể thao.

Chúng ta đều sử dụng xác suất và thống kê trong hầu như mọi quyết định của chúng ta thực hiện, đôi khi theo tiềm thức. Chẳng hạn, bạn có thể không biết rằng số lượng tử vong từ các tai nạn xe hơi ở Mỹ là 42.636 vụ vào năm 2004. Tuy nhiên, nếu con số đó là 3 triệu, thì tôi chắc chắn là bạn sẽ biết. Hơn nữa, sự hiểu biết này có thể khiến bạn phải nghĩ kỹ trước khi ngồi vào xe ôtô mỗi buổi sáng. Tại sao những dữ liệu chính xác về số lượng tử vong trên đường phố này lại cho chúng ta một sự tự tin nhất định trong việc quyết định lái xe của chúng ta? Như chúng ta sắp thấy dưới đây, một thành phần quan trọng đối với độ tin cậy của những số liệu này, đó là thực tế rằng chúng dựa trên những con số rất lớn. Số người chết ở Thị trấn Frio, Texas với dân số là 49 người vào năm 1969 thật khó mà có sức thuyết phục tương tự. Xác suất và thống kê nằm trong số những mũi tên quan trọng đối với chiếc cung của các nhà kinh tế, các cố vấn chính trị, nhà di truyền học, các công ty bảo hiểm, và bất kỳ ai muốn chắt lọc ra những kết luận có ý nghĩa từ một số lượng lớn các dữ liệu. Khi chúng ta nói về toán học đang lan truyền đến thậm chí những lĩnh vực mà ban đầu không ở dưới cái ô khoa học chính xác, thì nó thường đi vào qua các cửa sổ mở ra bởi lý thuyết xác suất và thống kê. Vậy những lĩnh vực hiệu quả này đã được hình thành như thế nào?

Thống kê (*statistics*) - một thuật ngữ có nguồn gốc từ tiếng Ý *stato* (nhà nước) và *statista* (người giải quyết những công việc của nhà nước) - ban đầu hàm ý là sự thu thập đơn giản những sự kiện bởi các quan chức chính phủ. Công trình quan trọng đầu tiên về thống kê theo nghĩa hiện đại được thực hiện không phải bởi một nhà nghiên cứu chuyên nghiệp mà là một ông chủ cửa hiệu ở London thế kỷ 17. John Graunt (1620-74) được đào tạo để bán nút áo, kim khâu và rèm. Vì công việc này cho ông khá nhiều thời gian rảnh rỗi, Graunt đã tự học tiếng Latinh và tiếng Pháp và bắt đầu quan tâm đến Bảng yết thị tử vong - số lượng người chết hàng tuần từ các giáo xứ - được xuất bản ở London từ năm 1604. Quá trình phát hành các báo cáo này được thiết lập chủ yếu là để đưa ra một tín hiệu cảnh báo sớm về những dịch bệnh nguy hiểm. Sử dụng những số liệu thô đó, Graunt bắt đầu có những quan sát thú vị mà cuối cùng ông đã cho xuất bản một cuốn sách nhỏ 85 trang nhan đề *Những quan sát chính trị và tự nhiên đề cập đến trong danh mục kèm theo và dựa trên Bảng yết thị tử vong*. Hình 32 là ví dụ về một bảng thuộc cuốn sách của Graunt, trong đó không dưới 63 căn bệnh và thương vong được liệt kê theo thứ tự bảng chữ cái. Trong lời đề tặng vị Chủ tịch Hội Hoàng gia, Graunt đã

(9)

The Diſeaſes, and Caſualties this year being 1632.

Abortive, and Stilborn	445	Jaundies	43
Affrighted	1	Jawfaln	8
Aged	628	Impoſtume	74
Ague	43	Kil'd by ſeveral accidents	46
Apoplex, and Meagrom	17	King's Evil	38
Bit with a mad dog	1	Lethargie	2
Bleeding	3	Livergrown	87
Bloody flux, ſcowring, and flux	348	Lunatique	5
Bruſed, Iſſues, ſores, and ulcers,	28	Made away themſelves	15
Burnt, and Scalded	5	Meaſles	80
Burſt, and Rupture	9	Murthered	7
Cancer, and Wolf	10	Over-laid, and ſtarved at nurſe	7
Canker	1	Palſie	25
Childbed	171	Piles	1
Chriſomes, and Infants	2268	Plague	8
Cold, and Cough	55	Planet	13
Colick, Stone, and Strangury	56	Pleuriſie, and Spleen	36
Conſumption	1797	Purples, and ſpotted Feaver	38
Convulſion	241	Quinſie	7
Cut of the Stone	5	Riſing of the Lights	98
Dead in the ſtreet, and ſtarved	6	Sciatica	1
Dropſie, and Swelling	267	Scurvey, and Itch	9
Drowned	34	Suddenly	62
Executed, and preſt to death	18	Surfet	86
Falling Sickneſs	7	Swine Pox	6
Fever	1108	Teeth	470
Fiſtula	13	Thruſh, and Sore mouth	40
Flocks, and ſmall Pox	531	Tympany	13
French Pox	12	Tiſſick	34
Gangrene	5	Vomiting	1
Gout	4	Worms	27
Grief	11		

Chriſtened { Males 4994, Females 4590, In all 9584 } Buried { Males 4932, Females 4603, In all 9535 } Whereof, of the Plague 8

Increaſed in the Burials in the 122 Pariſhes, and at the Peſthouſe this year 993
Decreaſed of the Plague in the 122 Pariſhes, and at the Peſthouſe this year, 266

C 7 In

Hình 32

chỉ ra rằng vì công trình của ông có liên quan đến "Không khí, Đất đai, Thời vụ, Sự màu mỡ, Sức khỏe, Bệnh tật, Tuổi thọ và Tỷ lệ giữa giới tính và tuổi tác của con người", nên nó thực sự là một chuyên luận về lịch sử tự nhiên. Thực sự thì Graunt đã không làm gì hơn là chỉ đơn giản thu thập và đưa ra số liệu. Chẳng hạn, bằng cách xem xét số lượng bình quân lễ rửa tội và ma chay với cả đàn ông và đàn bà ở London và ở giáo xứ vùng nông thôn Romsey ở Hamshire, lần đầu tiên ông đã chứng minh được tính ổn định về tỷ lệ giới tính khi sinh. Đặc biệt là ông đã phát hiện ở London, cứ 13 trẻ em gái ra đời thì có 14 trẻ em trai và ở Ramsey là 15 trẻ em gái trên 16 trẻ em trai. Đáng kể hơn, Graunt đã nhìn thấy trước để nêu ra thắc mắc rằng "những khách du lịch sẽ hỏi liệu điều đó có xảy ra tương tự như vậy ở các quốc gia khác hay không". Ông cũng lưu ý rằng "đó là một sự may mắn cho loài người, bởi với tỷ lệ *đàn ông* cao hơn, thì đây chính là một rào cản tự nhiên cho *tục đa thê*: vì trong tình trạng mà phụ nữ không thể sống trong sự bình đẳng và ngang bằng về chi tiêu với chồng của mình, như hiện nay, thì ở đây họ cũng vậy". Ngày nay, tỷ lệ giả định chung giữa các bé trai và bé gái là vào khoảng 1,05. Theo truyền thống, người ta giải thích sự trội hơn về số lượng của con trai là do Mẹ tự nhiên đã sắp đặt có lợi cho con trai phần nào là bởi vì thai nhi và trẻ em trai thường yếu ớt hơn. Một cách tình cờ, vì lý do nào đó hoàn toàn không rõ, tỷ lệ các bé trai ở cả Mỹ và Nhật Bản đều giảm nhẹ mỗi năm kể từ những năm 1970.

Một nỗ lực tiên phong khác của Graunt đó là ý định xây dựng một phân bố theo độ tuổi đối với những người còn sống, bằng cách sử dụng dữ liệu về số lượng người chết tùy theo nguyên nhân. Điều này rõ ràng là có một tầm quan trọng to lớn về mặt chính trị, vì nó liên quan đến số người đi chiến đấu - những người ở độ tuổi từ 16 đến 56 - trong dân cư. Nói một cách nghiêm túc thì Graunt không có đủ thông tin để suy ra phân bố theo độ tuổi. Tuy nhiên, điều chính xác suy ra ở đây là ông đã chứng tỏ mình một người thông minh và có tư duy sáng tạo. Dưới đây là mô tả của ông về cách xác định tỷ lệ tử vong ở trẻ em:

> Quan sát ban đầu của chúng tôi về số người tử vong cho thấy là, trong 20 năm, số trẻ em chết do các loại bệnh là 229.250, trong đó 71.124 chết vì đẹn, co giật, còi xương, bệnh về răng, và giun; và xảy thai, chết yểu, chướng gan,... ; như vậy có thể nói 1/3 số trẻ em chết là do các bệnh tật nói trên, qua đó ta có thể dự đoán rằng chúng đều rơi vào trẻ em dưới 4 hoặc 5 tuổi. Số trẻ chết vì bệnh đậu mùa, bệnh đậu lợn và sởi, và giun mà không bị co giật là 12.210, mà chúng ta dự đoán tương tự là vào khoảng 1/2 là trẻ em dưới 6 tuổi. Giờ nếu chúng ta xem xét đến 16 ngàn trường hợp trong số 229 nghìn trẻ em chết vì lý do đặc biệt và số tử vong lớn vì dịch bệnh, thì chúng ta sẽ thấy khoảng 36% tất cả những trường hợp thụ thai đã chết trước 6 tuổi."

Nói cách khác, Graunt đã dự đoán tỷ lệ tử vong dưới 6 tuổi là (71.124 + 6.105) ÷ (229.250-16.000) = 0,36. Sử dụng lập luận tương tự và những phỏng đoán hợp lý, Graunt cũng đã ước tính được tỷ lệ tử vong của người già. Cuối cùng, ông đã lấp đầy khoảng cách từ 6 tuổi đến 76 tuổi bằng một giả thiết toán học về quan hệ giữa tỷ lệ tử vong với độ tuổi. Trong khi nhiều kết luận của

Graunt không thực sự hợp lý, song nghiên cứu của ông đã khởi đầu cho khoa học thống kê như chúng ta biết hôm nay. Sự quan sát của ông cho thấy tỷ lệ phần trăm của một số sự kiện mà trước đó được xem là thuần túy có tính chất may rủi hay số mệnh (như cái chết gây ra bởi những loại bệnh tật khác nhau) thì thực tế lại có tính quy luật cực kỳ rõ ràng, và chính điều đó đã đưa tư duy khoa học, định lượng vào các khoa học xã hội.

Những nhà nghiên cứu sau Graunt đã làm theo một số khía cạnh trong phương pháp luận của ông, đồng thời cũng phát triển sự hiểu biết toán học tốt hơn trong việc sử dụng thống kê. Có lẽ đáng ngạc nhiên là người có những cải tiến đáng kể nhất đối với bảng phân bố theo tuổi của Graunt lại là nhà thiên văn học Edmond Halley - chính là người đã thuyết phục Newton xuất bản cuốn *Principia*. Tại sao mọi người lại quan tâm đến bảng phân bố theo độ tuổi đến như vậy? Một phần có lẽ là vì điều này đã, và hiện vẫn còn là, cơ sở cho bảo hiểm nhân thọ. Các công ty bảo hiểm nhân thọ (và nhất là những kẻ đào mỏ, kết hôn vì tiền!) rất quan tâm đến câu hỏi đại loại như: Nếu một người sống đến 60 tuổi thì xác suất để ông ta hay bà ta sống được đến 80 tuổi là bao nhiêu?

Để xây dựng bảng phân bố theo độ tuổi của mình, Halley đã sử dụng những báo cáo chi tiết được lưu giữ tại thành phố Breslau ở Silesia từ cuối thế kỷ 16. Một mục sư địa phương ở Breslau, TS. Caspar Neumann, đã sử dụng danh sách này để dập tắt sự mê tín trong giáo xứ của mình cho rằng sức khỏe chịu ảnh hưởng bởi các pha của Mặt trăng hay bởi các tuổi chia hết cho 7 và 9. Cuối cùng, bài báo của Halley với cái tên khá dài "Ước tính tỷ lệ tử vong của loài người, dựa trên bảng kê các ca sinh nở và đám tang ở thành phố Breslaw; với nỗ lực nhằm xác định cái giá của niên khoản dành cho sinh mệnh", đã trở thành cơ sở cho toán học sử dụng trong bảo hiểm nhân thọ. Để có được ý niệm về việc các công ty bảo hiểm tính toán khoản dôi ra của họ ra sao, chúng ta hãy nghiên cứu bảng phân bố theo độ tuổi của Halley dưới đây:

Bảng phân bố theo độ tuổi của Halley

Tuổi hiện thời	Số người	Tuổi hiện thời	Số người	Tuổi hiện thời	Số người
1	1000	11	653	21	592
2	855	12	646	22	586
3	798	13	640	23	579
4	760	14	634	24	573
5	732	15	628	25	567
6	710	16	622	26	560
7	692	17	616	27	553
8	680	18	610	28	546
9	670	19	604	29	539
10	661	20	598	30	531
Tuổi hiện thời	Số người	Tuổi hiện thời	Số người	Tuổi hiện thời	Số người
31	523	41	436	51	335
32	515	42	427	52	324
54	507	43	417	53	313
34	499	44	407	54	302
35	490	45	397	55	292
36	481	46	387	56	282
37	472	47	377	57	272

38	463	48	367	58	262
39	454	49	357	59	252
40	445	50	346	60	242
Tuổi hiện thời	Số người	Tuổi hiện thời	Số người	Tuổi hiện thời	Số người
61	232	71	131	81	34
62	222	72	120	82	28
63	212	73	109	83	23
64	202	74	98	84	20
65	192	75	88		
66	182	76	78		
67	172	77	68		
68	162	78	58		
69	152	79	49		
70	142	80	41		

Ví dụ, bảng trên cho thấy rằng có 710 trẻ em 6 tuổi còn sống, 346 ở độ tuổi 50. Người ta có thể lấy tỷ số 346/710 hay 0,49 làm ước tính xác suất để một em bé 6 tuổi có thể sẽ sống tới tuổi 50. Tương tự như vậy, trong số 242 người ở tuổi 60, thì 41 người vẫn còn sống ở tuổi 80. Tức là xác xuất để sống từ 60 đến 80 tuổi sẽ được ước tính bằng tỷ số 41/242 hay khoảng 0,17. Sự hợp lý phía sau quá trình này rất đơn giản. Nó dựa trên kinh nghiệm trong quá khứ để xác định xác suất của nhiều sự kiện tương lai khác nhau. Nếu mẫu mà kinh nghiệm dựa vào nó được khẳng định đủ lớn (bảng của Halley dựa trên con số khoảng 34.000 người), và nếu một số giả thiết là đúng (như tỷ lệ tử vong là hằng số theo thời gian), thì xác suất được tính là khá tin cậy. Dưới đây là những gì mà Jakob Bernoulli miêu tả về cùng một vấn đề:

> Tôi tự hỏi, cái chết nào có thể khẳng định số lượng bệnh tật, khi đếm tất cả các trường hợp khả dĩ, làm cho con người đau đớn ở mỗi một bộ phận trên cơ thể và ở mọi độ tuổi, và nói một căn bệnh này có thể chắc chắn gây chết người hơn căn bệnh khác bao nhiêu... và dựa trên cơ sở đó để dự đoán về mối quan hệ giữa cuộc sống và cái chết trong những thế hệ tương lai?

Sau khi kết luận điều này và những dự đoán tương tự "dựa trên những yếu tố hoàn toàn mơ hồ, và liên tục đánh lừa cảm giác của chúng ta bằng sự phức tạp vô tận trong mối quan hệ qua lại giữa chúng", Bernoulli cũng đưa ra một cách tiếp cận xác suất/thống kê:

> Tuy nhiên, có một cách khác dẫn chúng ta đến thứ mà chúng ta đang tìm kiếm và giúp chúng ta ít nhất cũng khẳng định được *cái hậu nghiệm*, cái mà chúng ta không thể xác định được một cách *tiên nghiệm*, tức là, khẳng định được nó qua những kết quả quan sát được ở vô số những ví dụ tương tự. Trong mối quan hệ như vậy thì phải thừa nhận rằng, dưới cùng những điều kiện như nhau, thì sự xuất hiện (hoặc không xuất hiện) của một sự kiện trong tương lai sẽ theo cùng kiểu như các sự kiện tương tự được quan sát trong quá khứ. Chẳng hạn, nếu bạn quan sát thấy rằng trong số 300 người ở cùng độ tuổi và với cùng thể chất như một anh chàng *Titius* nào đó, có 200 người chết trong vòng 10 năm trong khi số còn lại còn sống sót, thì chúng ta có thể kết luận với một độ chắc chắn hợp lý rằng vận rủi để Titius phải trả món nợ của mình cho tự nhiên trong 10 năm tiếp theo sẽ lớn hơn hai lần so với cơ may để anh ta sống sót vượt quá thời gian đó.

Halley tiếp tục những bài viết có tính chất toán học của mình về tỷ lệ tử vong với một nhận xét rất thú vị có phần hàm ý triết học nhiều hơn. Một trong những trang viết rất đặc biệt này:

> Bên cạnh những sử dụng mà tôi đã nói đến ở trên, việc suy ra từ các bảng tương tự có lẽ không phải là điều không thể chấp nhận được, sẽ thật là không đúng khi chúng ta bực bội vì cuộc sống của chúng ta ngắn ngủi, và cho rằng bản thân mình đã làm điều gì đó sai trái nếu không sống được đến lúc tuổi già; trong khi ở đây dường như một nửa số người được sinh ra chết trong độ tuổi 17, 1238 người khi đó giảm xuống chỉ còn 616 người. Như vậy, thay vì than phiền cái mà chúng ta gọi là Chết không đúng lúc, chúng ta phải phục tùng cái chết đó với sự kiên nhẫn và bình thản, đó là điều kiện cần của những vật liệu có thể chết của chúng ta, và của cấu trúc và thành phần tốt đẹp nhưng yếu ớt của chúng ta: và việc chúng ta tồn tại, có lẽ trong nhiều năm, là một điều sung sướng, một quãng đời mà một nửa loài người không thể đi đến.

Trong tình hình mà nhiều điều trong thế giới hiện đại đã tiến bộ đáng kể so với thống kê đáng buồn của Halley thì điều này không may lại là không đúng cho mọi quốc gia. Ở Zambia chẳng hạn, tỷ lệ tử vong ở độ tuổi lên 5 và dưới 5 vào năm 2006 được ước tính là 182 trên 1.000, một con số thật sửng sốt. Tuổi thọ trung bình ở Zambia vẫn ở mức thấp đến đau lòng là 37 tuổi.

Tuy nhiên, thống kê không chỉ liên quan đến cái chết. Nó còn thâm nhập vào mọi khía cạnh cuộc sống con người, từ những đặc điểm vật lý đơn giản đến những sản phẩm trí tuệ. Một trong những người đầu tiên nhận thấy sức mạnh của thống kê trong việc tạo ra “các quy luật” tiềm năng cho khoa học xã hội là nhà thông thái người Bỉ Lambert-Adolphe-Jacques Quetelet (1796-1874). Ông, hơn bất kỳ người nào khác, là người đã đưa vào khái niệm thống kê phổ biến “người chuẩn”.

Người chuẩn

Adolphe Quetelet sinh ngày 22 tháng 2 năm 1796 tại thị trấn cổ Ghent nước Bỉ. Cha ông, một công chức của thị trấn, mất khi Adolphe mới 7 tuổi. Buộc phải tự kiếm sống từ khi còn trẻ, Quetelet bắt đầu dạy toán khi mới 17 tuổi. Khi không phải đi dạy, ông sáng tác thơ, soạn lời nhạc kịch, tham gia viết hai vở kịch và dịch một vài tác phẩm văn học. Dù vậy, chủ đề ưa thích của ông vẫn là toán học và ông là người đầu tiên tốt nghiệp với tấm bằng tiến sĩ khoa học từ trường Đại học Ghent. Vào năm 1820, Quetelet được bầu làm viện sĩ Viện Hàn lâm Khoa học Hoàng gia Bỉ và trong một thời gian ngắn, ông đã trở thành một thành viên tích cực nhất của Viện. Những năm sau đó, ông chủ yếu dành cho công việc giảng dạy và xuất bản một số chuyên luận về toán học, vật lý và thiên văn học.

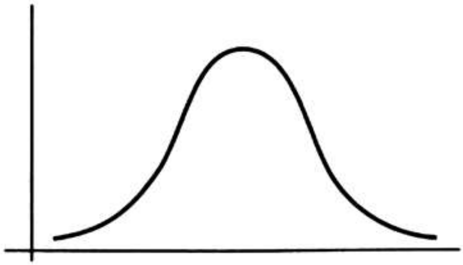
Quetelet thường mở đầu cho bài giảng của mình về lịch sử khoa học bằng một nhận xét rất tinh tế sau: “Khoa học càng phát triển thì chúng càng có xu hướng tiến sâu vào lĩnh vực toán học, một loại tâm điểm mà các khoa học đều hội tụ về. Chúng ta có thể đánh giá về mức độ hoàn hảo mà một bộ môn khoa học đạt tới thông qua mức độ tiếp cận của môn khoa học ấy với những tính toán toán học".

Vào tháng 12 năm 1823, Quetelet được gửi sang Paris bằng nguồn ngân sách nhà nước, chủ yếu là để nghiên cứu các kỹ thuật quan sát trong thiên văn học. Tuy nhiên, hóa ra ba tháng tới thăm thủ đô toán học của thế giới đã chuyển Quetelet sang một hướng hoàn toàn khác - lý thuyết xác suất. Người có vai trò chủ yếu nhất gợi nên hứng thú nhiệt tình của Quetelet đối với đề tài này chính là Laplace. Quetelet sau này đã tóm tắt lại kinh nghiệm của ông với thống kê và xác suất:

> May rủi, một từ bí ẩn, bị lạm dụng quá nhiều, nên cần được xem chỉ như là một tấm mạng che đậy sự ngu dốt của chúng ta; nó là một bóng ma làm nhiễu loạn cái đế chế tuyệt đối nhất đối với lương tri, vốn chỉ quen xem xét các sự kiện một cách cô lập, nhưng lại là hoàn toàn vô nghĩa trước nhà triết học, người có con mắt bao quát cả một chuỗi dài các sự kiện và sự thấu thị của anh ta không để cho những biến đổi làm cho lạc lối, và những biến đổi này sẽ biến mất khi người đó cho mình một góc nhìn đủ để nắm bắt được các quy luật của tự nhiên.

Tầm quan trọng của kết luận này không phải là chuyện được phóng đại lên. Quetelet về căn bản đã phủ nhận vai trò của may rủi và thay nó bằng suy luận táo bạo (thậm chí mặc dù còn hoàn toàn chưa được chứng minh) cho rằng ngay cả các hiện tượng xã hội cũng có những nguyên nhân và rằng tính quy luật bộc lộ từ những kết quả thống kê có thể được sử dụng để phát hiện những quy tắc nằm bên dưới trật tự xã hội.

Trong một nỗ lực thử nghiệm cách tiếp cận thống kê của mình, Quetelet đã bắt đầu một dự án khá tham vọng là tập hợp hàng ngàn những phép đo có liên quan đến cơ thể con người. Chẳng hạn, ông đã nghiên cứu phân bố số đo vòng ngực của 5.738 binh lính Scotland và chiều cao của 100.000 người đến tuổi đi lính của Pháp bằng cách vẽ đồ thị một cách riêng rẽ tần suất xuất hiện mỗi một đặc tính của con người. Nói cách khác, ông đã biểu diễn bằng đồ thị có bao nhiêu người lính, chẳng hạn, có chiều cao nằm giữa 1m50 đến 1m58, sau đó là giữa 1m58 đến 1m64, và cứ tiếp tục như vậy. Sau đó, ông còn dựng những đường cong tương tự ngay cả với những cái mà ông gọi là đặc tính "đạo đức" mà ông đã có đủ dữ liệu. Các đại lượng "đạo đức đó" bao gồm tự tử, hôn nhân và xu hướng phạm tội. Trước sự kinh ngạc của chính mình, Quetelet đã khám phá ra rằng tất cả những đặc tính của con người đều tuân theo cái mà ngày nay gọi là phân bố *chuẩn*, một phân bố tần suất có dạng hình chuông (hay còn gọi là phân bố *Gauss*, theo tên "hoàng tử toán học" Carl Friedrich Gauss, một tên gọi phần nào không được đúng lắm), (H. 33). Dù là chiều cao, cân nặng, số đo độ dài các chi, hay thậm chí cả các phẩm chất về trí tuệ được xác định bởi cái mà sau này là những trắc nghiệm tâm lý tiên phong, thì vẫn cùng một loại đường cong phân bố chuẩn xuất hiện lặp đi lặp lại trong tất cả các trường hợp đó. Bản thân đường cong này không phải là mới với Quetelet, vì các nhà toán học và vật lý học đã phát hiện ra nó từ giữa thế kỷ 18 và Quetelet đã quá quen thuộc với nó từ công việc thiên văn của mình, mà cái phần nào gây sốc ở đây là sự liên đới giữa đường cong này với các đặc tính của con người. Trước kia, đường cong này được biết tới là *đường cong sai số*, bởi nó thường xuất hiện trong bất cứ loại sai số nào trong quá trình đo đạc.



Hình 33

Chẳng hạn, hãy hình dung bạn muốn đo chính xác nhiệt độ của một chất lỏng trong một cái bình. Bạn có thể sử dụng nhiệt kế có độ chính xác cao và trong khoảng thời gian một giờ đồng hồ, bạn đọc nhiệt kế liên tục 1000 lần. Bạn sẽ thấy rằng vì những sai số ngẫu nhiên và có thể do một số thăng giáng về nhiệt độ mà không phải mọi lần đo đều cho chính xác cùng một giá trị. Thực tế, các số đo có xu hướng cụm lại xung quanh một giá trị trung tâm, với một số lần đo cho nhiệt độ cao hơn và một số lần khác cho giá trị thấp hơn. Và nếu bạn vẽ đồ thị biểu diễn số lần mà một giá trị đo xuất hiện theo giá trị của nhiệt độ, thì bạn sẽ thu được một đường cong hình chuông như là Quetelet đã tìm thấy đối với các đặc tính của con người. Trong thực tế, số lần đo thực hiện trên bất kỳ đại lượng vật lý nào càng lớn thì sự phân bố tần suất thu được càng gần với đường cong chuẩn. Hệ quả trực tiếp của thực tế này đối với câu hỏi về tính hiệu quả đến phi lý của toán học là rất ấn tượng - ngay cả những sai số của con người cũng tuân theo một số quy tắc toán học chặt chẽ.

Quetelet cho rằng kết luận này thậm chí còn có ảnh hưởng sâu rộng hơn nữa. Ông xem việc phát hiện ra rằng các đặc tính của con người tuân theo đường cong sai số là một chỉ dấu cho thấy "người chuẩn" trong thực tế chính là loại mà tự nhiên cố gắng tạo ra. Theo Quetelet, cũng giống như sai số trong sản xuất tạo ra sự phân bố độ dài của các cái đinh xung quanh độ dài trung bình (đúng), sai số của tự nhiên cũng được phân bố xung quanh một loại sinh học được ưu tiên. Ông tuyên bố rằng người dân của một quốc gia thường cụm lại xung quanh người chuẩn (hay trung bình) của họ "cứ như thể họ là kết quả của những phép đo thực hiện trên một và chỉ một người, nhưng bằng các dụng cụ quá cồng kềnh đủ để đánh giá được sự thay đổi về kích thước".

Rõ ràng là những tư biện của Quetelet đã đi hơi quá xa. Đành rằng khám phá của ông cho thấy những đặc tính sinh học (dù là thể chất hay tinh thần) được phân bố theo đường cong tần suất chuẩn là cực kỳ quan trọng, song điều này không thể được xem là bằng chứng cho những ý định của tự nhiên cũng như những biến thiên của các cá thể không thể được xem chỉ như là những sai sót đơn thuần. Chẳng hạn, Quetelet đã phát hiện ra rằng chiều cao trung bình của những người ở độ tuổi đăng lính của Pháp là 1m64. Tuy nhiên, ở đầu thấp, ông lại phát hiện một người cao có 0,45m. Rõ ràng là không thể có chuyện pham sai số tới gần 1m2 khi đo chiều cao của một người cao 1m64.

Ngay cả khi chúng ta bỏ qua ý niệm của Quetelet về "quy luật" tạo nên con người từ một khuôn mẫu duy nhất, thì bản thân thực tế rằng những phân bố của rất nhiều đặc tính từ cân nặng cho đến chỉ số IQ tất cả đều tuân theo đường cong chuẩn đã là điều khá kỳ lạ rồi. Và nếu như thế vẫn còn chưa đủ, thì ngay cả sự phân bố của bình quân các cú đánh bóng chày của giải Major-League cũng khá phù hợp với phân bố chuẩn, cũng như tỷ suất lợi nhuận thường niên về chỉ số chứng khoán (được cấu thành từ nhiều loại chứng khoán đơn lẻ). Và thực tế, những phân bố lệch khỏi đường cong chuẩn đôi khi đòi hỏi phải được xem xét lại một cách thận trọng. Chẳng hạn, nếu sự phân bố điểm môn Tiếng Anh tại một trường nào đó được phát hiện không phải là chuẩn, thì điều này buộc sẽ phải có một cuộc thanh tra thực tiễn chấm điểm tại trường học đó. Điều này không có nghĩa là mọi phân bố đều phải là chuẩn. Sự phân bố độ dài các từ mà Shakespear sử dụng trong các vở kịch của ông không phải là chuẩn. Ông sử dụng các từ có 3 và 4 chữ cái nhiều hơn các từ có 11 hay 12 chữ cái. Thu nhập hộ gia đình thường niên ở Mỹ cũng cho thấy một sự phân bố không chuẩn. Ví dụ như năm 2006, 6,37% các hộ gia đình hàng đầu kiếm được khoảng 1/3 tổng thu nhập. Thực tế này làm nảy sinh một câu hỏi rất thú vị: nếu các đặc tính cả về thể chất lẫn tinh thần của con người (được cho là quyết định đến tiềm năng thu nhập) đều tuân theo phân bố chuẩn, vậy tại sao thu nhập lại không? Tuy nhiên, trả lời cho những câu hỏi kinh tế-xã hội kiểu như vậy vượt ra ngoài phạm vi của cuốn sách này. Từ góc độ giới hạn này của chúng tôi, thì thực tế đáng kinh ngạc là, về căn bản, mọi đặc điểm về thể chất có thể đo được của con người, hay động vật và thực vật (thuộc một tập hợp đã cho bất kỳ) đều được phân bố theo chỉ một loại hàm số toán học.

Các đặc trưng của con người về mặt lịch sử không chỉ là cơ sở cho việc nghiên cứu sự phân bố tần suất thống kê mà còn cho việc thiết lập một khái niệm toán học là *sự tương quan*. Tương quan đo mức độ mà những biến đổi trong giá trị của một biến (số) được kèm theo những thay đổi của một biến khác. Chẳng hạn, những phụ nữ cao hơn được kỳ vọng là sẽ đi giày số lớn hơn. Tương tự như vậy, các nhà tâm lý học đã phát hiện ra sự tương quan giữa trí thông minh của cha mẹ với mức độ thành công của con cái họ ở trường.

Khái niệm tương quan trở nên đặc biệt hữu dụng ở những tình huống mà trong đó không có sự phụ thuộc hàm số thực sự giữa hai biến số. Ví dụ, hãy hình dung một biến số là nhiệt độ ban ngày cực đại ở nam Arizona và biến số khác là số các đám cháy rừng ở vùng đó. Với giá trị đã cho của nhiệt độ, người ta không thể dự đoán được một cách chính xác số các vụ cháy rừng sẽ xảy ra, vì biến số thứ hai còn phụ thuộc vào các biến số khác như độ ẩm và số đám cháy do con người gây nên. Nói cách khác, với bất kỳ giá trị nhiệt độ nào thì có thể có nhiều số lượng đám cháy rừng tương ứng và ngược lại. Vì vậy, khái niệm toán học được gọi là *hệ số tương quan* cho phép chúng ta đo được một cách định lượng độ mạnh yếu của mối quan hệ giữa hai biến số kiểu như vậy.

Người đầu tiên đưa ra công cụ hệ số tương quan lại là một nhà địa lý, nhà khí tượng, nhà nhân chủng học và thống kê thời Victoria, Ngài Francis Galton (1822-1911) - anh em họ với Charles Darwin - chứ không phải là một nhà toán học chuyên nghiệp. Là một người có đầu óc cực kỳ thực tế, ông thường dành sự nâng cấp toán học tinh tế những khái niệm cách tân của mình cho các nhà toán học khác, mà đặc biệt là nhà thống kê Karl Pearson (1857-1936). Dưới đây là sự giải thích của Galton về khái niệm tương quan:

> Độ dài của cubit [cẳng tay] có tương quan với vóc người, vì một cẳng tay dài thường là của người cao. Nếu sự tương

quan giữa hai thứ này là rất chặt chẽ thì một cẳng tay rất dài sẽ thường là của người có tầm vóc rất cao, nhưng nếu tương quan đó là không thật chặt chẽ, thì một cẳng tay rất dài, về trung bình, sẽ gắn với người chỉ có tầm vóc cao, chứ không phải là rất cao; trong khi đó, nếu sự tương quan này bằng *0* thì một cẳng tay rất dài sẽ gắn với một người có tầm vóc không có gì đặc biệt và vì vậy, về trung bình, chỉ là người tầm thước.

Pearson cuối cùng đã đưa ra được một định nghĩa toán học chính xác của hệ số tương quan. Hệ số này được định nghĩa theo cách sao cho khi sự tương quan là rất chặt chẽ - tức là khi một biến số này thay đổi theo sát với xu hướng tăng giảm của biến số kia - thì hệ số này có giá trị là 1. Khi hai đại lượng là *phản tương quan*, có nghĩa là khi biến số này tăng thì biến số kia giảm và ngược lại, thì hệ số tương quan bằng -1. Còn hai biến số mà biến này hành xử như thể biến kia không tồn tại thì có hệ số tương quan bằng 0. (Chẳng hạn, hành vi của một số chính phủ không may lại có hệ số tương quan bằng không với nguyện vọng của người dân mà họ được coi là đại diện).

Nghiên cứu y học hiện đại và dự báo kinh tế chủ yếu dựa trên sự nhận dạng và tính toán các tương quan. Mối quan hệ giữa hút thuốc và ung thư phổi, và giữa phơi nắng và ung thư da, chẳng hạn, ban đầu được thiết lập là nhờ phát hiện và đánh giá các tương quan. Các nhà phân tích thị trường chứng khoán liên tục cố gắng tìm kiếm và định lượng các tương quan giữa hành vi thị trường và các biến số khác; bất kỳ một phát hiện nào như vậy đều có thể tạo ra lợi nhuận rất lớn.

Như một số nhà thống kê đầu tiên đã nhận thấy, cả việc thu thập dữ liệu thống kê lẫn việc giải thích chúng đều có thể rất lắt léo và phải được xử lý vô cùng thận trọng. Một người đánh cá sử dụng tấm lưới có các mắt rộng 10 insơ rất hay có thiên hướng kết luận rằng mọi con cá đều lớn hơn 10 insơ, đơn giản chỉ bởi vì những con nhỏ hơn đã thoát ra khỏi lưới của anh ta. Đây là một ví dụ về *hiệu ứng chọn lọc* - những thiên vị được đưa vào kết quả hoặc là do công cụ được sử dụng để thu thập dữ liệu hoặc do phương pháp luận được sử dụng để phân tích chúng. Việc lấy mẫu cũng đặt ra một vấn đề khác. Chẳng hạn, các cuộc thăm dò dư luận ngày nay thường phỏng vấn không nhiều hơn vài ba ngàn người. Vậy thì làm thế nào mà những người thăm dò có thể đảm bảo chắc chắn rằng quan điểm của những người tham gia cuộc thăm dò này là đại diện một cách chính xác cho quan điểm của hàng trăm triệu người? Một điểm khác cần phải ý thức là sự tương quan không nhất thiết có hàm ý là nguyên nhân. Doanh số bán các máy nướng bánh mì lát loại mới có thể tăng đồng thời với sự tăng số khán giả của các buổi hòa nhạc cổ điển, nhưng điều này không có nghĩa là sự hiện diện trong nhà một máy nướng bánh mì lát loại mới đã làm tăng sự tán thưởng âm nhạc. Đúng hơn là cả hai kết quả này đều có thể là do sự cải thiện của nền kinh tế.

Bất chấp những cảnh báo quan trọng này, thống kê đã trở thành một trong những công cụ hiệu quả nhất trong xã hội hiện đại, thực sự đem "khoa học" vào các khoa học xã hội. Nhưng tại sao thống kê lại làm được như vậy? Câu trả lời được đưa ra bởi môn toán học *xác suất* đã thống trị nhiều mặt của đời sống hiện đại. Các kỹ sư khi đang cân nhắc để quyết định xem nên cài đặt cơ cấu an toàn nào vào CEV (*Crew Exploration Vehicle* - tàu vũ trụ có người) cho các nhà du hành vũ trụ, các nhà vật lý hạt đang phân tích những kết quả thu được trong các thí nghiệm trên máy gia tốc, các nhà tâm lý đang đánh giá các bài trắc nghiệm IQ cho trẻ em, các công ty dược phẩm đang đánh giá hiệu quả của các loại thuốc mới, và các nhà di truyền học đang nghiên cứu tính di truyền của con người, tất cả họ đều phải sử dụng lý thuyết xác suất.

Trò chơi may rủi

Nghiên cứu về xác suất một cách nghiêm túc đã bắt đầu từ những xuất phát điểm rất khiêm tốn - đó là nỗ lực của những kẻ chơi đỏ đen tìm cách đặt cược thế nào cho chắn ăn. Đặc biệt là vào giữa thế kỷ 17, một nhà quý tộc người Pháp tên là Chevalier de Méré, một tay cờ bạc khét tiếng, đã đặt ra một loạt các câu hỏi về trò đánh bạc cho nhà toán học và triết gia nổi tiếng người Pháp là Blaise Pascal (1623-62). Vào năm 1654, Pascal đã trao đổi thư từ về những câu hỏi này với một nhà toán học Pháp vĩ đại khác vào thời đó là Pierre de Fermat (1601-65). Và lý thuyết xác suất cuối cùng đã ra đời từ sự trao đổi thư từ này.

Hãy xét một trong những ví dụ hấp dẫn được Pascal đề cập đến trong bức thư đề ngày 29 tháng 7 năm 1654. Giả sử có hai nhà quý tộc cùng chơi trò gieo một con xúc xắc. Mỗi người chơi đặt lên bàn 32 đồng tiền vàng. Người chơi thứ nhất chọn số 1 và người chơi thứ hai chọn số 5. Mỗi lần con số mà một người chơi đã chọn xuất hiện, thì người chơi đó nhận được một điểm. Người thắng là người đầu tiên có được ba điểm. Tuy nhiên, giả sử rằng sau khi trò chơi đã diễn ra được một lúc, số 1 xuất hiện hai lần (do đó người chơi đã chọn số 1 được hai điểm), trong khi số 5 chỉ xuất hiện một lần (tức người kia chỉ được một điểm). Nếu, vì một lý do nào đó, trò chơi bị dừng lại vào lúc này, thì 64 đồng tiền vàng sẽ được chia cho hai người chơi như thế nào cho hợp lý? Pascal và Fermat đã tìm ra câu trả lời rất lôgic về mặt toán học. Nếu người chơi đã có hai điểm mà thắng trong lần gieo xúc xắc tiếp theo thì toàn bộ số tiền vàng sẽ thuộc về anh ta. Còn nếu người kia thắng trong lần gieo tiếp theo thì mỗi người chơi đều có hai điểm và vì vậy mỗi người sẽ nhận 32 đồng tiền vàng. Vì vậy, nếu hai người chơi dừng không gieo xúc xắc tiếp nữa thì người chơi thứ nhất có thể biện luận một cách đúng đắn như sau: “Tôi chắc chắn sẽ có 32 đồng tiền vàng ngay cả nếu tôi thua lần gieo xúc xắc tiếp theo, còn 32 đồng tiền còn lại có thể tôi được và cũng có thể anh được; cơ hội là ngang nhau. Vì vậy, hãy chia 32 đồng vàng này đều nhau và đưa cho tôi cả 32 đồng vàng mà tôi đã chắc chắn có được”. Nói cách khác, người chơi thứ nhất sẽ được 48 đồng tiền vàng và người kia được 16 đồng. Không thể tin được rằng một nguyên lý toán học mới và sâu sắc lại có thể nảy sinh từ một kiểu trao đổi bề ngoài quả là rất tầm thường này. Tuy nhiên, đây chính xác là lý do tại sao tính hiệu quả của toán học lại cao đến mức “phi lý” và bí ẩn như vậy.

Bản chất của lý thuyết xác suất có thể được soi sáng từ những thực tế đơn giản sau đây. Không ai có thể dự đoán được một cách chắc chắn một đồng xu tung lên cao sẽ rơi xuống là sấp hay ngửa. Ngay cả nếu đồng xu là ngửa suốt 10 lần liền thì điều đó cũng không cải thiện được mảy may nào khả năng phán đoán của chúng ta với lần tung đồng xu tiếp theo. Tuy nhiên, chúng ta có thể dự đoán chắc chắn rằng nếu bạn tung đồng xu đó 10 triệu lần thì gần một nửa sẽ cho mặt ngửa và gần một nửa cho mặt sấp. Thực tế, vào cuối thế kỷ 19, nhà thống kê Karl Pearson đã kiên nhẫn tung đồng xu 24.000 lần. Và ông đã nhận được 12.012 lần mặt ngửa. Theo một nghĩa nào đó, thì đây chính là bản chất của lý thuyết xác suất. Lý thuyết xác suất cho chúng ta những thông tin chính xác về tập hợp những kết quả của một số lượng lớn các thí nghiệm; nhưng nó không bao giờ có thể tiên đoán được kết quả của một thí nghiệm cụ thể nào. Nếu một thí nghiệm có thể cho *n* kết quả khả dĩ, thì mỗi kết quả đều có cơ hội xảy ra như nhau, và vì thế xác suất cho mỗi kết quả là 1/*n*. Nếu bạn gieo một con xúc xắc, thì xác suất có được mặt số 4 là 1/6, vì một con xúc xắc có 6 mặt và mỗi mặt đều là một kết cục khả dĩ như nhau. Giả sử bạn gieo con xúc xắc bảy lần liên tiếp và mỗi lần bạn đều nhận được mặt 4, thì xác suất nhận được mặt 4 ở lần gieo tiếp theo sẽ là bao nhiêu? Lý thuyết xác suất cho một câu trả lời rất rõ ràng: xác suất ấy vẫn là 1/6 - con xúc xắc không có bộ nhớ và mọi ý niệm về một "bàn tay nóng" hay về lần gieo tiếp theo tạo nên sự mất cân bằng trước đó chỉ là huyền thoại. Điều thực sự đúng ở đây là: nếu bạn tung con xúc xắc một triệu lần thì các kết quả sẽ quân bình và mặt 4 sẽ xuất hiện gần 1/6 số lần gieo.

Bây giờ chúng ta hãy xem xét một tình huống phức tạp hơn một chút. Giả sử rằng bạn tung ba đồng xu cùng một lúc. Xác suất để có hai đồng sấp và một đồng ngửa là bao nhiêu? Chúng ta có thể tìm ra câu trả lời một cách đơn giản bằng việc liệt kê tất cả các kết cục có thể có. Nếu ký hiệu mặt ngửa là "H" và mặt sấp là "T" thì có 8 kết cục khả dĩ như sau: TTT, TTH, THT, THH, HTT, HTH, HHT, HHH. Trong số này, bạn có thể tìm thấy ba trường hợp thỏa mãn yêu cầu "hai đồng sấp và một đồng ngửa". Như vậy, xác suất cho sự kiện này là 3/8. Hay tổng quát hơn, nếu trong số n kết cục có cơ hội ngang nhau, và có m kết cục thỏa mãn yêu cầu mà bạn đòi hỏi thì xác suất để sự kiện đó xảy ra là m/n. Lưu ý rằng điều này có nghĩa là xác suất luôn nhận giá trị giữa 0 và 1. Nếu sự kiện mà bạn quan tâm trong thực tế là không thể xảy ra thì $m = 0$ (không có kết cục nào thỏa mãn) và xác suất bằng 0. Mặt khác, nếu sự kiện là tuyệt đối chắc chắn, tức là tất cả n sự kiện đều thỏa mãn ($m = n$) thì xác suất khi đó đơn giản là $n/n = 1$. Các kết cục của việc tung ba đồng xu chứng minh một hệ quả quan trọng khác của lý thuyết xác suất - nếu bạn có một số sự kiện hoàn toàn *độc lập* với nhau, thì xác suất để tất cả các sự kiện đó đồng thời xảy ra bằng tích của các xác suất riêng lẻ. Ví dụ, xác suất của ba đồng xu đều ngửa là 1/8, bằng tích của ba xác suất để nhận được mặt ngửa của mỗi đồng xu: $1/2 \times 1/2 \times 1/2 = 1/8$.

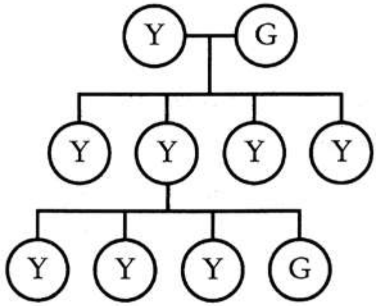
OK, bạn có thể nghĩ ngoài các trò chơi trong sòng bạc và các hoạt động cờ bạc khác, thì chúng ta có thể sử dụng những khái niệm xác suất rất cơ bản này vào việc gì nữa không? Bất kể bạn có tin hay không thì tùy nhưng các quy luật xác suất tưởng như không quan trọng lắm này lại là tâm điểm của những nghiên cứu hiện đại về di truyền học - khoa học nghiên cứu về sự kế thừa các đặc tính sinh học.

Người đưa xác suất vào di truyền học là một linh mục xứ Moravia. Gregor Mendel (1822-84) sinh ra tại một ngôi làng gần biên giới Moravia với Silesia (nay là Hynčice thuộc Cộng hòa Séc).

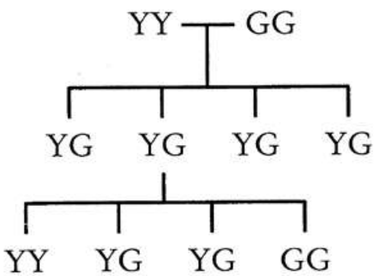
Sau khi vào học ở Tu viện St. Thomas thuộc dòng Augustine ở Brno, ông đã theo học về động vật học, thực vật học, vật lý học và hóa học tại Đại học Vienna. Trở lại Brno, ông bắt đầu tiến hành thực nghiệm ráo riết với cây đậu Hòa lan, với sự hỗ trợ mạnh mẽ từ phía cha tu viện trưởng của tu viện St. Thomas. Mendel tập trung nghiên cứu vào cây đậu vì chúng dễ mọc và cũng vì chúng mang trên mình cả cơ quan sinh sản đực và cái. Vì vậy cây đậu có thể tự thụ phấn hoặc thụ phấn lai với cây khác. Bằng việc thụ phấn lai các cây chỉ cho các hạt màu xanh (G) với cây chỉ cho các hạt màu vàng (Y), Mendel đã thu được kết quả mà mới thoạt nhìn có vẻ rất rối rắm (H. 34). Lứa thế hệ đầu tiên chỉ cho các hạt màu vàng. Tuy nhiên, thế hệ thứ hai lại cho tỷ lệ nhất quán vàng trên xanh là 3:1! Từ kết quả đáng ngạc nhiên này, Mendel đã suy ra ba kết luận mà sau này đã trở thành một dấu mốc lịch sử quan trọng trong ngành di truyền học:

1. Sự kế thừa của một đặc tính liên quan đến sự truyền lại một số "nhân tố" (cái mà ngày nay chúng ta gọi là *gen*) từ bố mẹ sang các con.
2. Mỗi con đều kế thừa một "nhân tố" như vậy từ bố hoặc mẹ (đối với một tính trạng bất kỳ).
3. Một đặc tính đã cho có thể không biểu lộ ở con cái nhưng nó vẫn có thể được truyền tiếp cho thế hệ sau.

Nhưng làm thế nào có thể giải thích được các kết quả định lượng ở thí nghiệm của Mendel? Mendel lý giải rằng mỗi cây bố mẹ phải có hai "nhân tố" giống hệt nhau (cái mà ngày nay chúng ta gọi là *allele*, hai thành phần của một gien), hoặc là cùng vàng hoặc là cùng xanh (như hình 35). Khi hai cây lai tạo với nhau,



Hình 34



Hình 35

mỗi con sẽ thừa hưởng hai allele khác nhau, một allele từ bố và một allele từ mẹ (theo quy tắc 2 ở trên). Như vậy mỗi hạt ở cây con sẽ chứa một allele màu vàng và một allele màu xanh. Vậy tại sao các cây đậu ở thế hệ này lại toàn màu vàng? Mendel giải thích rằng, vì màu vàng là màu trội và nó che đi sự hiện diện của allele màu xanh ở thế hệ này (quy tắc 3). Tuy nhiên, (vẫn theo quy tắc 3), màu vàng không ngăn cản được màu xanh lặn được truyền đến thế hệ tiếp theo. Trong vòng lai tạo tiếp theo, mỗi cây đậu chứa một allele màu vàng và một allele màu xanh được thụ phấn với một cây khác có cùng tổ hợp các allele tương tự. Vì các con nhận một allele từ bố và một alele từ mẹ, nên các hạt của thế hệ tiếp theo có thể chứa một trong các tổ hợp sau (hình 35): xanh-xanh, xanh-vàng, vàng-xanh hoặc vàng-vàng. Tất cả các hạt có allele vàng đều trở thành đậu vàng, vì vàng là trội. Vì vậy, do tất cả các tổ hợp allele là chắc chắn như nhau, nên tỷ lệ giữa đậu vàng và xanh phải là 3:1.

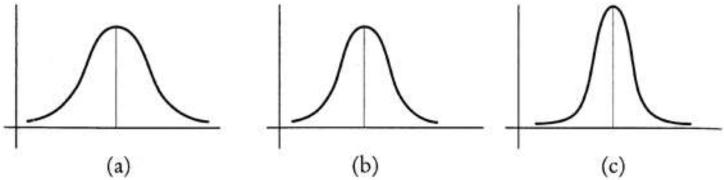
Bạn có thể nhận thấy rằng toàn bộ thí nghiệm của Mendel về thực chất giống hệt như thí nghiệm tung hai đồng xu. Gán mặt ngửa là màu xanh và sấp là màu vàng và việc hỏi tỷ phần các hạt đậu màu vàng (với màu vàng là trội trong việc quyết định màu sắc) thì cũng chẳng khác gì việc hỏi xác suất để có được ít nhất một mặt sấp khi tung hai đồng xu. Rõ ràng là 3/4, vì ba trong số các kết cục có thể (sấp-sấp, sấp-ngửa, ngửa-sấp và ngửa-ngửa) đều có một mặt sấp. Điều đó có nghĩa là tỷ lệ giữa số lần tung có chứa ít nhất một mặt sấp với số lần tung không có mặt sấp nào (trong rất nhiều lần tung) là 3:1, đúng như trong thí nghiệm của Mendel.

Bất chấp thực tế là Mendel đã cho công bố bài báo của mình nhan đề "Thí nghiệm lai giống cây" vào năm 1865 (và ông cũng đã giới thiệu các kết quả này tại hai hôi nghị khoa học), song công trình của ông không được công luận chú ý cho mãi đến khi nó được phát hiện vào đầu thế kỷ 20. Mặc dù có một số nghi vấn liên quan đến tính chính xác trong các kết quả của ông, nhưng ông vẫn được xem là người đầu tiên đặt nền móng toán học cho di truyền học hiện đại. Đi theo con đường đã được vạch ra bởi Mendel, nhà thống kê có ảnh hưởng lớn người Anh Ronald Aylmer Fisher (1890-1962) đã lập ra ngành di truyền học quần thể - một nhánh của toán học tập trung vào việc lập mô hình phân bố các gen trong một quần thể và tính toán sự thay đổi tần suất gen theo thời gian. Các nhà di truyền học ngày nay có thể sử dụng việc lấy mẫu thống kê kết hợp với nghiên cứu ADN để dự đoán các đặc tính có thể của đứa con chưa chào đời. Vậy, xác suất và thống kê có quan hệ với nhau chính xác là như thế nào?

Các sự kiện và dự báo

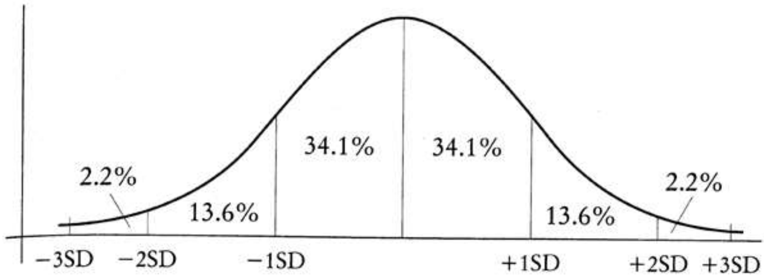
Đối với các nhà khoa học đang cố gắng giải mã sự tiến hóa của vũ trụ thi họ thường thử giải quyết vấn đề từ cả hai phía. Có những người bắt đầu từ những thăng giáng nhỏ bé nhất trong kết cấu của vũ trụ nguyên thủy, và có những người thì nghiên cứu từng chi tiết trong trạng thái hiện tại của vũ trụ. Những người loại thứ nhất sử dụng các mô phỏng trên các máy tính lớn để suy ra quá trình tiến hóa của vũ trụ. Còn những người loại thứ hai thì thực hiện các công việc như của các thám tử để suy ra quá khứ của vũ trụ từ vô số những sự kiện về hiện trạng của nó. Lý thuyết xác suất và thống kê liên quan với nhau theo cách tương tự. Trong lý thuyết xác suất, các biến số và trạng thái ban đầu đã biết, và mục tiêu là tiên đoán kết quả cuối cùng có xác suất lớn nhất. Còn trong thống kê, kết quả thì đã biết, nhưng những nguyên nhân trong quá khứ thì lại còn bất định.

Hãy xem xét một ví dụ đơn giản để thấy hai lĩnh vực này bổ trợ cho nhau như thế nào và gặp nhau đâu đó ở giữa ra sao. Chúng ta có thể bắt đầu từ thực tế là các nghiên cứu thống kê cho thấy rằng các phép đo một tập hợp nhiều đại lượng vật lý khác nhau và thậm chí của nhiều đặc tính của con người đều được phân bố theo



Hình 36

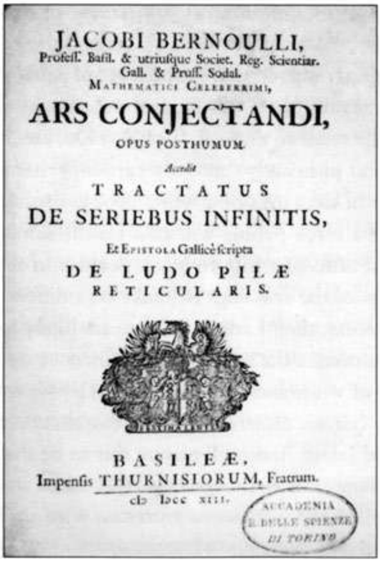
đường cong tần suất chuẩn. Nói một cách chính xác hơn, đường cong chuẩn không phải là một đường cong duy nhất mà là một họ các đường cong, tất cả đều có thể mô tả được bằng cùng một hàm số tổng quát và đều được đặc trưng hoàn toàn chỉ bởi hai đại lượng toán học. Đại lượng thứ nhất - *giá trị trung bình* - là giá trị trung tâm mà phân bố xung quanh nó là đối xứng. Tất nhiên giá trị thực của giá trị trung bình phụ thuộc vào loại biến số được đo (ví dụ cân nặng, chiều cao, hay chỉ số IQ). Ngay cả với cùng một biến số thì giá trị trung bình cũng có thể khác nhau đối với các quần thể khác nhau. Chẳng hạn, giá trị chiều cao trung bình của đàn ông Thụy Điển có thể khác với giá trị chiều cao trung bình của đàn ông ở Peru. Đại lượng thứ hai xác định đường cong chuẩn được gọi là *độ lệch chuẩn*. Đây là số đo độ phân tán của các dữ liệu quanh giá trị trung bình. Trong hình 36, đường cong chuẩn (a) có độ lệch chuẩn lớn nhất, bởi vì các giá trị phân tán rộng hơn. Tuy nhiên, ở đây xuất hiện một thực tế thú vị. Bằng cách sử dụng tích phân để tính diện tích nằm dưới đường cong, người ta có thể chứng minh bằng toán học rằng bất luận giá trị trung bình hay độ lệch chuẩn là như thế nào thì 68,2% dữ liệu cũng nằm trong vùng bị kẹp giữa một lệch chuẩn (1 SD) ở hai bên giá trị trung bình



Hình 37

(như trong H.37). Nói cách khác, nếu giá trị IQ trung bình của một quần thể dân số (lớn) nào đó là 100, và độ lệch chuẩn là 15 thì khi đó 68,2% người trong quần thể đó có chỉ số IQ nằm trong khoảng từ 85 đến 115. Hơn nữa, đối với mọi đường cong tần suất chuẩn, 95,4% của mọi trường hợp đều nằm trong khoảng giữa hai độ lệch chuẩn ở hai bên giá trị trung bình, và 99,7% dữ liệu nằm giữa ba độ lệch chuẩn ở hai bên giá trị trung bình (hình 37). Điều này ngụ ý rằng, trong ví dụ trên, 95,4% người dân ở đây có IQ nằm giữa 70 và 130 và 99,7% có IQ nằm giữa 55 và 145.

Giờ hãy giả sử rằng chúng ta muốn dự đoán xác suất chọn ngẫu nhiên ra một người trong quần thể đang xét có IQ nằm giữa 85 và 100. Hình 37 cho chúng ta thấy xác suất ấy phải là 0,341 (hay 34,1%), vì theo các định luật xác suất, xác suất đơn giản là số các kết cục thỏa mãn yêu cầu đã cho chia cho tổng số các khả năng. Hay chúng ta có thể muốn tìm xác suất mà một người nào đó (chọn ngẫu nhiên) có IQ lớn hơn 130 trong quần thể đó. Chỉ cần liếc nhìn hình 37 là ta có thể thấy xác suất này chỉ là 0,022, hay 2,2%. Tương tự như vậy, bằng cách sử dụng các tính chất của phân



JACOBI BERNOULLI,
Profess. Basil. & utriusque Societ. Reg. Scientiar. Gall. & Pruss. Sodal.
MATHEMATICI CELEBERRIMI,
ARS CONJECTANDI,
OPUS POSTHUMUM.
Accedit
TRACTATUS
DE SERIEBUS INFINITIS,
Et EPISTOLA Gallicè scripta
DE LUDO PILÆ
RETICULARIS.

BASILEÆ,
Impensis THURNISIORUM, Fratrum.
cIↄ Iↄcc XIII.

Hình 38

bố chuẩn và công cụ tích phân (để tính diện tích), người ta có thể tính được xác suất của chỉ số IQ trong một vùng bất kỳ cho trước. Nói cách khác, lý thuyết xác suất và người bạn đồng hành bổ sung cho nó là thống kê, khi kết hợp lại, sẽ cho chúng ta câu trả lời.

Như tôi đã lưu ý vài lần, xác suất và thống kê trở nên có ý nghĩa chỉ khi người ta xử lý một số lượng lớn các sự kiện, chứ không bao giờ là những sự kiện đơn lẻ. Sự nhận thức rất quan trọng này, được gọi là *định luật về số lớn*, có được là nhờ Jakob Bernoulli, người đã phát biểu nó như một định lý trong cuốn sách *Ars Conjectandi* (*Nghệ thuật phỏng đoán*; hình 38 là trang bìa cuốn sách này). Nói theo ngôn từ đơn giản, thì định lý này phát biểu rằng nếu xác suất xảy ra của một sự kiện là *p*, thì *p* là tỷ lệ khả dĩ nhất của những lần xuất hiện sự kiện so với tổng số lần thử nghiệm.

Thêm vào đó, vì số lần thử tiến đến vô cùng, nên tỷ lệ thành công trở thành *p* là chắc chắn. Dưới đây là cách Bernoulli giới thiệu quy luật số lớn trong cuốn *Ars Conjectandi:* "Điều vẫn còn được nghiên cứu là liệu bằng cách tăng số lần quan sát chúng ta cũng có thể làm tăng xác suất sao cho tỷ lệ của trường hợp thỏa mãn với không thỏa mãn sẽ tiến tới tỷ số thực, sao cho xác suất này cuối cùng sẽ vượt quá mức độ chắc chắn mong đợi hay không". Sau đó ông đã giải thích khái niệm này bằng một ví dụ cụ thể:

> Chúng ta có một cái bình chứa 3000 viên sỏi màu trắng và 2000 viên sỏi màu đen, và chúng ta mong muốn xác định theo kinh nghiệm tỷ số giữa sỏi trắng và sỏi đen - điều mà chúng ta chưa biết - bằng cách lấy từng viên sỏi ra khỏi bình và ghi lại bao nhiêu lần lấy ra được viên sỏi trắng và bao nhiêu lần lấy ra được viên sỏi đen. (Tôi lưu ý các bạn rằng, trước khi lấy viên sỏi tiếp theo, một yêu cầu quan trọng của quá trình này là bạn phải cho viên sỏi vừa lấy ra trở lại bình sau khi đã ghi lại màu sắc của nó, vì vậy số lượng sỏi trong bình luôn luôn không đổi). Giờ thì chúng ta sẽ hỏi, liệu bằng cách mở rộng vô hạn số phép thử có thể làm tăng 10, 100, 1000, v.v..., lần chắc chắn hơn (và sau cùng là "chắc chắn về luân lý") rằng tỷ số giữa số lần rút được viên sỏi trắng với số lần rút ra được viên sỏi đen sẽ có cùng giá trị (3:2) như tỷ số thực giữa sỏi trắng và sỏi đen trong bình, chứ không phải là một giá trị khác? Nếu câu trả lời là không thì tôi phải thừa nhận rằng chúng ta đã thất bại trong nỗ lực nhằm khẳng định số các sự kiện của mỗi trường hợp (như số các viên sỏi

> trắng và đen) bằng quan sát. Nhưng nếu điều đó là đúng thì chúng ta cuối cùng có thể đạt được sự chắc chắn về mặt tinh thần bằng phương pháp này [và Jakob Bernoulli đã chứng minh điều đó trong chương tiếp theo của *Ars Conjectandi*]... khi đó chúng ta sẽ xác định được số các sự kiện *hậu nghiệm* (*a posteriori*) với độ chính xác lớn gần như thể chúng đã biết chúng một cách *tiên nghiệm (a priori)*.

Bernoulli đã dành hai mươi năm trời để hoàn thiện định lý này, một định lý mà từ đó đã trở thành một trong những cột trụ trung tâm của thống kê. Ông đã kết luận với niềm tin của mình vào sự tồn tại tối hậu của các định luật chi phối, thậm chí trong cả những sự kiện mà dường như chỉ là vấn đề may rủi:

> Nếu tất cả các sự kiện từ nay đến vĩnh cửu được quan sát một cách liên tục (mà ở đó xác suất cuối cùng đã trở thành chắc chắn), thì chúng ta sẽ thấy rằng vạn vật trong thế giới này đều xuất hiện vì những lý do xác định và trong sự phù hợp hoàn toàn với quy luật, và vì vậy ngay cả với những điều tưởng chừng như là hoàn toàn ngẫu nhiên, chúng ta cũng buộc phải thừa nhận một mức độ tất yếu, và dường như có một tính định mệnh nhất định. Với tất cả những gì tôi biết thì đó chính là điều mà Plato đã nghĩ khi, trong thuyết về vũ trụ luân hồi, ông đã khẳng định rằng sau một hành trình qua vô số thế kỷ, vạn vật sẽ lại trở về trạng thái ban đầu của chúng.

Bài học rút ra từ câu chuyện về khoa học bất định này là rất đơn giản: Toán học có thể ứng dụng được theo một cách nào đó vào những lĩnh vực ít "khoa học" của đời sống của chúng ta, kể cả những lĩnh vực dường như bị chi phối bởi may rủi thuần túy. Vì vậy trong nỗ lực giải thích "tính hiệu quả đến phi lý" của toán học, chúng ta không thể giới hạn sự thảo luận chỉ đóng khung trong các định luật của vật lý học. Mà hơn thế, chúng ta cuối cùng sẽ phải bằng cách nào đó hình dung ra cái gì đã làm cho toán học lại hiện diện ở khắp mọi nơi như vậy.

Sức mạnh phi thường của toán học đã không phải không có tác động đến kịch tác gia và nhà văn viết tiểu luận kiệt xuất George Barnard Shaw (1856-1950). Rõ ràng là không nổi tiếng về tài năng toán học, song Shaw từng viết một bài báo uyên thâm về thống kê và xác suất với nhan đề "Sự đồi bại của Cờ bạc và sự tốt đẹp của Bảo hiểm". Trong bài báo này, Shaw thừa nhận rằng với ông bảo hiểm "dựa trên những thực tế không thể giải thích được và những rủi ro có thể tính toán được chỉ bởi các nhà toán học chuyên nghiệp". Vì vậy, ông đưa ra sự quan sát sâu sắc dưới đây:

> Hãy hình dung một cuộc đàm phán làm ăn giữa một nhà buôn muốn buôn bán với nước ngoài nhưng lại vô cùng lo sợ tàu đắm hoặc bị những con vật hung dữ ăn thịt, và một thuyền trưởng muốn có hàng hóa và hành khách. Thuyền trưởng trả lời tay nhà buôn rằng hàng hóa sẽ được an toàn tuyệt đối và cả ông ta cũng thế nếu ông ta đi theo hàng. Nhưng tay nhà buôn, với đầu óc nhét đầy những chuyện phiêu lưu của Jonah, St. Paul, Odysseus, và Robinson Crusoe, không dám mạo hiểm. Cuộc nói chuyện diễn ra đại loại như thế này:

Thuyền trưởng: Thôi nào! Tôi cá với ông vô hạn đồng bảng Anh rằng nếu ông đi tàu của tôi, ông sẽ sống và mạnh khỏe cho tới ngày này năm sau.

Nhà buôn: Nhưng nếu tôi nhận lời cá cược, tôi cũng sẽ cá với ông ngần ấy số tiền rằng tôi sẽ chết trong năm nay.

Thuyền trưởng: Thế thì tại sao lại không, nếu ông sẽ thua cuộc, vì ông chắc chắn sẽ thế mà.

Nhà buôn: Nhưng nếu tôi bị chìm thì ông cũng bị; thế thì chúng ta được gì từ vụ cá cược này chứ?

Thuyền trưởng: Đúng thế nhỉ. Nhưng tôi sẽ tìm cho ông một người trên đất liền, sẽ cá cược với gia đình và vợ ông.

Nhà buôn: Điều đó tất nhiên sẽ làm thay đổi tình hình đấy; nhưng thế còn hàng của tôi?

Thuyền trưởng: Ồ! Cá cược này cũng tính cả hàng hóa chứ. Hay hai cá cược nhé: một về mạng sống của ông, một là về hàng hóa. Cả hai sẽ an toàn, tôi đảm bảo với ông đấy. Sẽ chẳng có chuyện gì xảy ra cả; và ông sẽ thấy tất cả những kỳ quan cần phải thấy ở nước ngoài.

Nhà buôn: Nhưng nếu tôi và hàng hóa của tôi đến nơi an toàn, tôi sẽ phải trả ông tất cả của cải của đời tôi và cả hàng hóa đem bán nữa. Nếu tôi không bị chìm thì tôi cũng sẽ bị phá sản thôi.

Thuyền trưởng: Điều đó cũng đúng nhỉ. Nhưng cũng không nhiều nhặn gì cho tôi như ông nghĩ đâu. Nếu ông bị chìm, tôi cũng sẽ bị chìm trước; vì tôi phải là người cuối cùng rời khỏi con tàu bị đắm. Vì vậy, để tôi thuyết phục ông mạo hiểm nhé. Tôi sẽ cá 10 ăn 1. Như thế có hấp dẫn ông không?

Nhà buôn: Ờ, trong trường hợp đó thì...

Thuyền trưởng đã khám phá ra bảo hiểm cũng giống như thợ kim hoàn nghĩ ra ngân hàng vậy.

Với những người như Shaw, phàn nàn rằng trong nền giáo dục của mình "không có một từ nào nói về ý nghĩa hay tiện ích của toán học", thì câu chuyện vui về "lịch sử" của toán học trong bảo hiểm là rất đáng kể.

Trừ câu chuyện của Shaw, đến nay, chúng ta vẫn đi theo sự tiến triển của một số nhánh toán học phần nào thông qua con mắt của những nhà toán học thực hành. Với những người này, và thực sự thì với nhiều nhà triết học duy lý như Spinoza, thì học thuyết Plato là rất rõ ràng. Không có nghi ngờ gì về chuyện những chân lý toán học đã tồn tại trong thế giới của riêng của chúng và rằng trí tuệ con người có thể tiếp cận những chân lý đó mà không cần có bất kỳ sự quan sát nào, mà chỉ cần bằng khả năng suy luận. Những dấu hiệu đầu tiên về khoảng trống tiềm ẩn giữa nhận thức về hình học Euclid như là một sự tập hợp những chân lý phổ quát và các nhánh khác của toán học đã được nhà triết học Ireland George Berkeley, giám mục ở Cloyne (1685-1753) đề cập. Trong cuốn sách nhỏ nhan đề *Nhà giải tích; Hay Bàn thảo với một nhà toán học vô thần* (người nói đến ở vế sau được cho là Edmond Halley), Berkeley đã chỉ trích ngay chính những nền tảng của lĩnh vực giải tích và phép tính vi tích phân, được đưa ra bởi Newton (trong *Principia*) và Leibniz. Đặc biệt là Berkeley đã chứng minh rằng khái niệm "đạo hàm" của Newton, hay tốc độ biến thiên tức thời, là không được định nghĩa một cách chặt chẽ, mà điều này theo suy nghĩ của Berkeley đã là đủ để nghi ngờ toàn bộ lĩnh vực này:

> Phương pháp vi phân là một chìa khóa chung, giúp các nhà toán học hiện đại mở khóa những bí mật của Hình học, và do đó của cả Tự nhiên... Nhưng liệu Phương pháp này là rõ ràng hay mơ hồ, nhất quán hay mâu thuẫn, có luận chứng hay không có cơ sở, vì tôi mong muốn sự hoàn toàn vô tư, nên tôi đề nghị sự Suy xét của chính ngài và của mọi độc giả công tâm.

Berkeley chắc chắn là đã chạm đến đúng vấn đề và thực tế là một lý thuyết giải tích hoàn toàn nhất quán chỉ được phát biểu có hệ thống vào những năm 1960. Song toán học sắp phải trải qua một cuộc khủng hoảng mạnh mẽ hơn vào thế kỷ 19.

CHƯƠNG 6

NHÀ HÌNH HỌC: CÚ SỐC TƯƠNG LAI

Trong cuốn sách nổi tiếng *Cú sốc tương lai* của mình, tác giả Alvin Toffler đã định nghĩa thuật ngữ trên nhan đề của nó là “sự căng thẳng choáng váng và mất phương hướng mà chúng ta gây ra cho các cá nhân khi bắt họ phải chịu sự quá nhiều thay đổi trong một thời gian quá ngắn”. Vào thế kỷ 19, các nhà toán học, khoa học và triết học chính xác là đã trải qua một cú sốc như vậy. Thực tế, niềm tin đã kéo dài hàng thiên niên kỷ rằng toán học đưa ra những chân lý vĩnh cửu và không thể thay đổi, niềm tin ấy giờ đây đã bị tan vỡ. Sự thay đổi đột ngột về trí tuệ không được mong đợi này là do sự xuất hiện của những loại hình học mới, ngày nay gọi là *hình học phi Euclid*. Thậm chí mặc dù hầu hết những người không chuyên có thể chưa bao giờ nghe nói tới hình học phi Euclid, song tầm vóc của cuộc cách mạng trong tư duy được khởi xướng bởi những lĩnh vực toán học mới mẻ này với một số người được ví như thuyết tiến hóa của Darwin vậy.

Để đánh giá một cách đầy đủ bản chất của sự thay đổi sâu rộng này trong thế giới quan, trước hết chúng ta hãy xem xét một cách ngắn gọn bối cảnh lịch sử-toán học.

"Chân lý" kiểu Euclid

Cho mãi đến đầu thế kỷ 19, nếu như có một nhánh tri thức nào được xem là chắc chắn và như là sự suy tôn chân lý thì đó là hình học Euclid, hình học truyền thống mà tất cả chúng ta đều học ở nhà trường. Vì vậy, không có gì đáng ngạc nhiên khi mà nhà triết học Do Thái người Hà Lan vĩ đại Baruch Spinoza (1632-77) đã đặt tên cho nỗ lực táo bạo của mình nhằm thống nhất khoa học, tôn giáo, đạo đức và lý trí là *Đạo đức, được minh chứng trong trật tự hình học*. Hơn nữa, mặc dù có sự khác biệt rõ ràng giữa thế giới Platonic lý tưởng về các hình dạng toán học và thực tại vật lý, nhưng hầu hết các nhà khoa học vẫn xem những đối tượng của hình học Euclid đơn giản là sự trừu tượng hóa được chưng cất từ những đối ứng vật lý, có thực của chúng. Ngay cả người theo chủ nghĩa kinh nghiệm chắc chắn như David Hume (1711-76), người khăng khăng rằng chính những nền tảng của toán học còn kém chắc chắn hơn tất cả những gì mà người ta đã từng nghi ngờ, cũng phải kết luận rằng hình học Euclid là vững chắc như núi đá Gibraltar. Trong cuốn *Một cuộc điều tra liên quan đến hiểu biết của con người*, Hume đã chỉ ra các "chân lý" có hai loại:

> Tất cả mọi đối tượng của suy lý hay điều tra của con người đều có thể được chia một cách tự nhiên thành hai loại, cụ thể là: Mối quan hệ của các Ý tưởng và Thực tế. Thuộc loại thứ nhất là... mọi khẳng định hoặc bằng trực giác hoặc được chứng minh là chắc chắn... Các mệnh đề thuộc loại này có thể được khám phá ra chỉ bằng thao tác tư duy, chứ không phụ thuộc vào chuyện có tồn tại ở đâu đó trong vũ trụ. Mặc dù không bao giờ có một đường tròn

> hay hình tam giác trong tự nhiên, song các chân lý được chứng minh bởi Euclid sẽ mãi mãi giữ được sự chắc chắn và hiển nhiên của chúng. Còn Thực tế... không được khẳng định theo cách như thế; cả bằng chứng của chúng ta về sự đúng đắn của chúng cũng vậy, dù mạnh đến thế nào, cũng có cùng bản chất như thế. Sự đối lập của mỗi thực tế là vẫn có thể xảy ra; bởi vì nó không bao giờ hàm ý một sự mâu thuẫn cả... Mặt trời sẽ không mọc vào ngày mai là một tuyên bố không hàm ý mâu thuẫn gì hơn khẳng định rằng Mặt trời sẽ mọc. Vì vậy, sẽ là vô ích khi chúng ta cố gắng chứng minh điều đó là sai lầm.

Nói cách khác, trong khi Hume, giống như tất cả những người theo chủ nghĩa kinh nghiệm khác, khẳng định rằng mọi tri thức đều có nguồn gốc từ sự quan sát, thì hình học và những "chân lý" của nó sẽ vẫn còn được hưởng một vị thế có nhiều ưu ái.

Nhà triết học kiệt xuất người Đức Immanuel Kant (1724-1804) không phải luôn luôn đồng quan điểm với Hume, song ông cũng đề cao hình học Euclid tới địa vị tuyệt đối chắc chắn và có giá trị không thể nghi vấn. Trong cuốn sách đáng nhớ của ông *Phê phán lý tính thuần túy*, Kant đã thử đảo ngược, theo nghĩa nào đó, mối quan hệ giữa trí tuệ và thế giới vật lý. Thay cho những ấn tượng về thực tại vật lý in dấu lên một trí tuệ hoàn toàn thụ động, Kant lại cho trí tuệ vai trò chủ động trong việc "dựng nên" và "xử lý" vũ trụ được nhận thức. Hướng sự chú ý vào bên trong, Kant đặt câu hỏi không phải về chúng ta có thể biết *cái gì*, mà là *làm thế nào* chúng ta có thể biết những điều chúng ta có thể biết. Ông giải thích rằng trong khi mắt chúng ta thu nhận các hạt ánh sáng thì những hạt này còn chưa tạo nên hình ảnh trong ý thức của chúng ta cho đến khi thông tin được xử lý và tổ chức bởi bộ não chúng ta. Vai trò then chốt trong quá trình dựng nên hình ảnh này được gán cho sự nắm bắt không gian một cách trực giác hay tổng hợp của con người một cách *tiên nghiệm*, mà đến lượt mình, nó lại được lấy dựa trên hình học Euclid. Kant tin rằng hình học Euclid đã mở ra con đường đúng đắn duy nhất cho việc xử lý và khái niệm hóa không gian, và sự làm quen với không gian một cách trực giác và phổ quát này nằm ở trung tâm kinh nghiệm của chúng ta về thế giới tự nhiên. Kant viết:

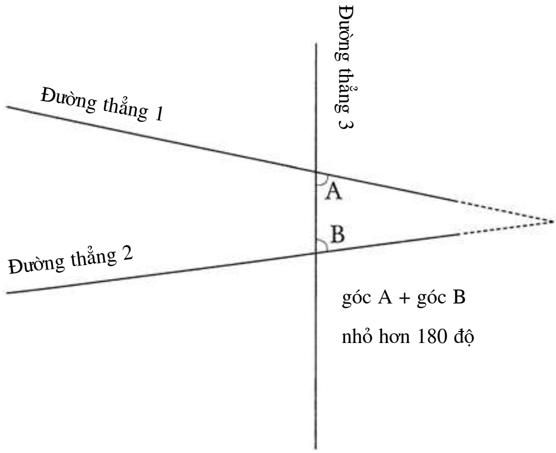
> Không gian không phải là một khái niệm thường nghiệm được rút ra từ kinh nghiệm bên ngoài... Không gian là một biểu tượng tất yếu *tiên nghiệm*, làm cơ sở cho mọi trực quan bên ngoài... Tính xác tín hiển nhiên của mọi nguyên lý hình học và khả năng tạo dựng nên chúng một cách *tiên nghiệm* đều dựa trên tính tất yếu này của một biểu tượng *tiên nghiệm* của không gian. Vì nếu trực giác về không gian là một khái niệm có được một cách *hậu nghiệm*, vay mượn từ kinh nghiệm bên ngoài nói chung thì những nguyên lý đầu tiên của định nghĩa toán học sẽ không gì khác hơn là những tri giác. Như vậy, chúng có mọi tính bất tất/ngẫu nhiên của tri giác, và việc chỉ có một đường thẳng nối hai điểm sẽ không phải là một tất yếu mà chỉ là điều gì đó được dạy trong mỗi trường hợp bằng kinh nghiệm mà thôi.

Để nói một cách đơn giản hơn, thì theo Kant, nếu chúng ta nhận biết được một vật, thì vật đó tất yếu phải thuộc về không gian và là đối tượng của hình học Euclid.

Những ý tưởng của Hume và Kant đã làm nổi lên hai khía cạnh khá khác nhau, nhưng có tầm quan trọng ngang nhau, mà về phương diện lịch sử gắn liền với hình học Euclid. Khía cạnh thứ nhất là tuyên bố rằng hình học Euclid biểu diễn sự mô tả chính xác duy nhất về không gian vật lý. Khía cạnh thứ hai là sự đồng nhất hình học Euclid với cấu trúc suy diễn vững chắc, quyết định và không thể sai lầm. Kết hợp lại, hai tính chất giả định này đã cung cấp cho các nhà toán học, khoa học và triết học những thứ mà họ coi là bằng chứng mạnh nhất chứng tỏ rằng những chân lý tất yếu và giàu thông tin về vũ trụ là thực sự tồn tại. Cho mãi đến thế kỷ 19, những tuyên bố này mới được công nhận. Nhưng liệu chúng có thực sự là đúng không?

Nền tảng của hình học Euclid đã được xây đặt vào khoảng năm 300 trước CN bởi nhà toán học người Hy Lạp Euclid ở Alexandria. Trong tác phẩm đồ sộ gồm 13 tập của ông nhan đề *Cơ sở*, Euclid đã nỗ lực dựng lên môn hình học trên một cơ sở lôgic được xác định rất rõ ràng. Ông đã bắt đầu với 10 tiên đề được cho là đúng đắn không thể bàn cãi và tìm cách chứng minh một số lượng lớn các mệnh đề (định lý) dựa trên các tiên đề này chỉ bằng những suy luận lôgic.

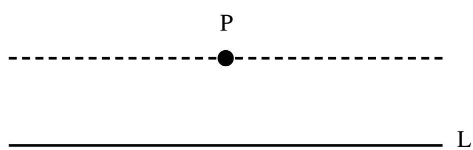
Bốn tiên đề đầu tiên của Euclid cực kỳ đơn giản và súc tích. Chẳng hạn, tiên đề đầu tiên phát biểu: “Giữa bất kỳ hai điểm nào cũng đều có thể dựng được một đường thẳng”. Tiên đề thứ tư phát biểu: “Mọi góc vuông đều bằng nhau”. Ngược lại, tiên đề thứ năm, được gọi là “tiên đề đường thẳng song song”, phát biểu hơi phức tạp hơn một chút nhưng ít hiển nhiên hơn một cách đáng kể: “Nếu



Hình 39

hai đường thẳng nằm trên một mặt phẳng cắt một đường thẳng thứ ba sao cho tổng các góc trong cùng phía nhỏ hơn hai góc vuông, thì hai đường thẳng đó chắc chắn sẽ cắt nhau nếu được kéo đủ dài về phía đó." Hình 39 minh họa nội dung của tiên đề này. Dù không ai nghi ngờ tính đúng đắn của phát biểu này, song ở nó không có sự đơn giản giàu tính thuyết phục của các tiên đề khác. Tất cả các chỉ dấu đều cho thấy ngay cả bản thân Euclid cũng không hoàn toàn hài lòng với tiên đề thứ năm của mình - bằng chứng là 81 mệnh đề (định lý) trong cuốn *Cơ sở* không sử dụng đến nó một lần nào. Một phiên bản tương đương của tiên đề thứ năm mà ngày nay được sử dụng nhiều nhất đã xuất hiện lần đầu tiên trong các bình luận của nhà toán học Hy Lạp Proclus vào thế kỷ thứ 5, song nó lại thường được gọi là "tiên đề Playfair" theo tên của nhà toán học Scotland John Playfair (1748-1819). Phiên bản này được phát biểu như sau: "Với một đường thẳng đã cho và một điểm nằm ngoài đường thẳng đó, ta chỉ có thể vẽ được đúng một đường thẳng đi qua điểm đó và song song với đường thẳng đã cho" (xem H. 40). Hai phiên bản của tiên đề 5 là tương đương theo nghĩa tiên đề Playfair (cùng với các tiên đề khác) nhất thiết phải kéo theo tiên đề 5 gốc của Euclid và ngược lại.

Qua nhiều thế kỷ, sự không hài lòng với tiên đề 5 ngày càng tăng dẫn đến rất nhiều nỗ lực thực sự muốn chứng minh tiên đề này từ chín tiên đề còn lại hoặc thay thế nó bằng một tiên đề hiển nhiên hơn, nhưng đều không thành công. Khi những nỗ lực này thất bại, nhiều nhà hình học khác bắt đầu tìm cách trả lời câu hỏi rất hấp dẫn và thú vị: điều gì sẽ xảy ra nếu như trên thực tế tiên đề thứ 5 không chứng minh được là đúng? Một số những người này đã bắt đầu đưa ra những nghi ngờ gây tranh cãi rằng liệu các tiên đề của Euclid có thực sự là hiển nhiên chứ không phải là dựa trên kinh nghiệm hay không. Phán quyết đáng ngạc nhiên cuối cùng đã đến vào thế kỷ 19: Người ta có thể sáng tạo ra những loại hình hình học mới bằng cách *chọn* một tiên đề khác với tiên đề thứ 5 của Euclid. Hơn nữa, hình học "phi Euclid" này về nguyên tắc cũng có thể mô tả được không gian vật lý chính xác như hình học Euclid đã làm.



Hình 40

Hãy dừng lại ở đây một chút để thấm nhuần ý nghĩa của từ “chọn”. Trong nhiều thiên niên kỷ, hình học Euclid được xem là duy nhất và *tất yếu* - một cách mô tả duy nhất đúng về không gian. Việc người ta có thể chọn các tiên đề và nhận được sự mô tả cũng đúng đắn không kém đã làm một cuộc cách mạng đối với toàn bộ khái niệm này. Cái sơ đồ suy diễn được xây dựng một cách thận trọng và chắc chắn đột nhiên trở nên giống như một trò chơi mà trong đó các tiên đề đơn giản chỉ đóng vai trò là luật chơi mà thôi. Bạn có thể thay đổi các tiên đề và chơi một trò chơi khác. Khỏi cần phải nói quá tác động của nhận thức này đến sự tìm hiểu bản chất của toán học.

Một số ít các nhà toán học giàu sáng tạo đã chuẩn bị cơ sở cho cuộc tấn công cuối cùng vào hình học Euclid. Đặc biệt đáng chú ý trong số họ là giáo sĩ dòng Tên Girolamo Saccheri (1667-1733), người đã nghiên cứu những hệ quả của việc thay thế tiên đề thứ 5 bằng một phát biểu khác, và hai nhà toán học người Đức là Georg Klugel (1739-1812) và Johann Heinrich Lambert (1728-1777), những người đầu tiên đã nhận ra rằng có thể tồn tại những hình học khác thay thế cho hình học Euclid. Dù vậy, vẫn cần có ai đó đóng cái đinh cuối cùng vào chiếc quan tài chứa ý tưởng cho rằng hình học Euclid là một biểu diễn duy nhất của không gian. Vinh dự đó được chia cho ba nhà toán học, một của nước Nga, một của Hungary và một của nước Đức.

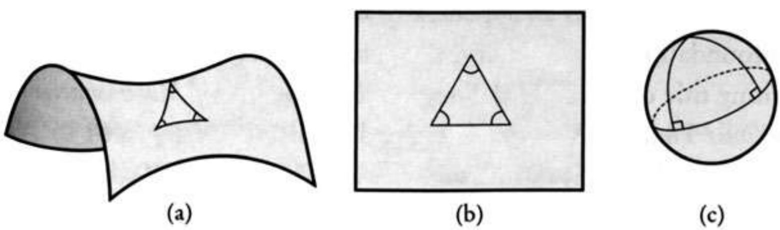
Những thế giới mới lạ

Người đầu tiên xuất bản cả một chuyên luận về một loại hình học mới - hình học có thể xây dựng trên một mặt có hình dạng như một cái yên ngựa cong (H. 41a) - đó là Nikolai Ivanovich Lobachevsky (1792-1856; H. 42). Trong loại hình học này (ngày nay được gọi là *hình học hyperbolic*), tiên đề thứ 5 của Euclid được thay thế bằng phát biểu rằng: Cho một đường thẳng trên một mặt phẳng và một điểm không nằm trên đường thẳng đó, có ít nhất hai đường thẳng đi qua điểm đó và song song với đường thẳng đã cho. Sự khác biệt quan trọng giữa hình học Lobachevsky và hình học Euclid đó là trong loại hình học sau, tổng các góc trong một tam giác luôn bằng 180 độ (H. 41b), còn trong loại hình học trước, thì tổng đó luôn nhỏ hơn 180 độ. Vì công trình của Lobachevsky xuất hiện trên tạp chí *Kazan Bulletin*, một tạp chí không mấy tiếng tăm, nên nó gần như hoàn toàn không được chú ý cho mãi đến khi bản dịch sang tiếng Pháp và tiếng Đức của nó xuất hiện vào cuối những năm 1830.

Tổng các góc nhỏ hơn 180^0

Tổng các góc bằng 180^0

Tổng các góc lớn hơn 180^0

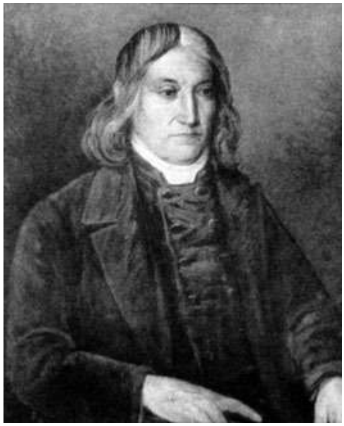


Hình 41

Hoàn toàn không biết gì về tác phẩm của Lobachevsky, một nhà toán học trẻ người Hungary là János Bolyai (1802-60) cũng đã xây dựng được một hình học tương tự trong suốt những năm 1820.

Hình 42

Tràn đầy nhiệt huyết của tuổi trẻ, vào năm 1823, ông đã viết thư cho cha mình (nhà toán học Farkas Bolyai; H. 43): "Con đã phát hiện ra những thứ tuyệt vời đến mức con đã phải sững sờ... Con đã tạo ra cả một thế giới mới khác từ không gì cả..." Đến năm 1825, János thực sự đã có thể đặt trước Bolyai cha bản thảo đầu tiên về hình học mới của ông. Bản thảo mang tên *Khoa học tuyệt đối về không gian (The Science Absolute of Space)*. Mặc cho sự phấn khích của chàng trai trẻ, người cha hoàn toàn không bị thuyết phục bởi tính hợp lý trong những ý tưởng của János. Tuy nhiên, ông đã quyết định công bố hình học mới này như là một phụ lục trong một chuyên luận hai tập của ông về những cơ sở của hình học, số học và giải tích (với cái tên rất hấp dẫn là *Tiểu luận về những cơ sở của toán học dành cho các thanh niên ham học)*. Một bản của cuốn sách đã được gửi đến một người bạn của Farkas là Carl Friedrich Gauss (1777-1855; H. 44) vào tháng 6 năm 1831, người không chỉ là nhà toán học kiệt xuất nhất vào thời đó mà còn



Hình 43

là nhân vật được nhiều người cho rằng, cùng với Archimedes và Newton, là ba nhà toán học vĩ đại nhất mọi thời đại. Cuốn sách này vì lý do gì đó đã bị thất lạc trong cảnh hỗn loạn gây ra bởi trận dịch tả và Farkas đã phải gửi đến bản thứ hai. Gauss đã trả lời vào ngày 6 tháng 3 năm 1832, và bình luận của ông lại không phải là những gì mà chàng trai trẻ János mong đợi:

> Nếu tôi bình luận bằng cách nói rằng tôi không thể tán thưởng công trình này thì chắc là anh sẽ ngạc nhiên đôi chút. Nhưng tôi không thể nói khác đi được. Để tán thưởng nó, thì cũng có nghĩa là tán thưởng bản thân tôi. Thực sự thì toàn bộ nội dung của cuốn sách, con đường mà con trai anh đã lựa chọn, kết quả mà cậu ta đã thu được, đều trùng khớp với hầu như toàn bộ sự suy ngẫm của tôi, những suy ngẫm đã phần nào xâm chiếm tâm trí tôi trong suốt

Hình 44

> 30 hay 35 năm qua. Vì vậy tôi thật sự kinh ngạc. Còn về công trình của chính tôi, mà cho đến tận giờ tôi mới chỉ viết được chút ít ra giấy, thì ý định của tôi là sẽ không công bố chừng nào mà tôi còn sống.

Tôi xin phép được mở ngoặc nhận xét rằng rõ ràng là Gauss đã lo sợ hình học mới hoàn toàn này sẽ bị các nhà triết học theo trường phái Kant, những người mà ông coi là bọn "Boetian" (đồng nghĩa với từ "ngu ngốc" theo tiếng Hy Lạp cổ), xem là dị giáo triết học. Gauss viết tiếp:

> Mặt khác, ý định của tôi là sẽ viết ra tất cả những điều đó để cho sau này, ít nhất thì nó cũng không tàn lụi đi cùng với tôi. Chính vì vậy, thật là một sự ngạc nhiên dễ chịu là tôi thoát được sự phiền phức này, và tôi rất vui vì chính con trai một người bạn cũ của tôi đã chiếm lấy quyền ưu tiên theo cách xuất sắc như vậy.

Trong khi Farkas hoàn toàn hài lòng với sự tán thưởng của Gauss, mà ông cho là “rất tuyệt”, thì János lại vô cùng thất vọng. Trong vòng gần một thập kỷ, anh không tin điều tuyên bố của Gauss về tác quyền, và mối quan hệ của anh với cha mình (người mà anh nghi ngờ đã thông báo quá sớm những kết quả này cho Gauss) đã trở nên rất căng thẳng. Khi cuối cùng anh hiểu ra rằng Gauss thực sự đã bắt đầu nghiên cứu vấn đề này ngay từ năm 1799, János đã trở nên cay đắng một cách tuyệt vọng, và những thành quả toán học sau này của anh (anh đã để lại khoảng 20 ngàn trang bản thảo khi qua đời) đều khá mờ nhạt.

Tuy nhiên, có rất ít nghi ngờ rằng Gauss đã thực sự có những suy nghĩ đáng kể về hình học phi Euclid. Trong nhật ký tháng 9 năm 1799, ông đã viết: “*In principiis geometriae egregios progressus fecimus”* (“Về các nguyên lý hình học mà chúng tôi đã thu được những thành quả tuyệt vời”. Sau đó vào năm 1813, ông đã viết: “Trong lý thuyết về các đường thẳng song song, chúng ta giờ cũng không đi xa hơn Euclid. Đó là *partie honteuse* [phần đáng xấu hổ] của toán học, mà không sớm thì muộn cũng phải có một dạng rất khác.” Một vài năm sau, trong bức thư viết ngày 28 tháng 4 năm 1817, ông nói: “Tôi ngày càng đi gần tới sự tin chắc chắn rằng sự tất yếu của hình học của chúng ta [tức hình học Euclid] là không thể được chứng minh”. Cuối cùng, và ngược với quan điểm của Kant, Gauss đã kết luận rằng hình học Euclid không thể được xem như là một chân lý phổ quát nữa, mà đúng hơn, “người ta cần xếp hình học [Euclid] không phải cùng hàng với số học, là cái *tiên nghiệm*, mà chỉ được xếp ngang với cơ học mà thôi”. Các kết luận tương tự cũng được đưa ra một cách độc lập bởi Ferdinand Schweikart (1780-1859), một giáo sư luật học, và ông này đã thông báo cho Gauss về thành quả của mình vào khoảng thời gian đâu đó trong năm 1818 hoặc 1819. Tuy nhiên, vì cả Gauss lẫn Schweikart thực sự không công bố các kết quả của mình nên vinh dự công bố đầu tiên được trao cho Lobachevsky và Bolyai, mặc dù hai người họ khó có thể được xem là những "nhà sáng tạo" duy nhất của hình học phi Euclid.

Hình học hyperbolic đã làm rung chuyển thế giới toán học như một tiếng sét, nó đã giáng một đòn khủng khiếp vào nhận thức cho rằng hình học Euclid là một sự mô tả duy nhất, không thể sai lầm về không gian. Trước các công trình của Gauss-Lobachevsky-Bolyai thì trong thực tế hình học Euclid *đã là* thế giới tự nhiên. Việc người ta có thể chọn một tập hợp các tiên đề khác và xây dựng một loại hình học khác lần đầu tiên đã khơi lên sự nghi vấn rằng, xét cho cùng, thì toán học cũng chỉ là phát minh của con người chứ không phải là sự khám phá ra những chân lý tồn tại độc lập với trí tuệ con người. Đồng thời, sự sụp đổ của mối liên kết trực tiếp giữa hình học Euclid và không gian vật lý thực đã phơi bày ra những cái dường như là những thiếu sót tai hại trong ý tưởng cho rằng toán học là ngôn ngữ của vũ trụ.

Vị thế đặc quyền của hình học Euclid đã chuyển từ tình trạng xấu sang tồi tệ hơn khi mà một trong số các học trò của Gauss là Bernhard Riemann chứng tỏ được rằng hình học hyperbolic cũng không phải là thứ hình học phi Euclid duy nhất khả dĩ. Trong bài giảng tuyệt vời tại Gôttingen vào ngày 10 tháng 6 năm 1854 (H. 45 là trang đầu tiên của bài giảng được công bố sau đó), Riemann đã trình bày quan điểm của mình "Về những giả thuyết nằm ở nền tảng của hình học”. Ông bắt đầu bằng việc tuyên bố rằng “hình học đã giả định trước khái niệm không gian, cũng như thừa nhận những nguyên lý cơ bản cho việc dựng hình trong không gian. Nó chỉ đưa ra những định nghĩa có tính danh nghĩa cho những thứ đó, trong khi các chi tiết thực chất lại trình hiện dưới dạng các tiên đề”.

Ueber

die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen.

Von

B. Riemann.

Aus dem Nachlass des Verfassers mitgetheilt durch R. Dedekind[1]).

Plan der Untersuchung.

Bekanntlich setzt die Geometrie sowohl den Begriff des Raumes, als die ersten Grundbegriffe für die Constructionen im Raume als etwas Gegebenes voraus. Sie giebt von ihnen nur Nominaldefinitionen, während die wesentlichen Bestimmungen in Form von Axiomen auftreten. Das Verhältniss dieser Voraussetzungen bleibt dabei im Dunkeln; man sieht weder ein, ob und in wie weit ihre Verbindung nothwendig, noch a priori, ob sie möglich ist.

Diese Dunkelheit wurde auch von Euklid bis auf Legendre, um den berühmtesten neueren Bearbeiter der Geometrie zu nennen, weder von den Mathematikern, noch von den Philosophen, welche sich damit beschäftigten, gehoben. Es hatte dies seinen Grund wohl darin, dass der allgemeine Begriff mehrfach ausgedehnter Grössen, unter welchem die Raumgrössen enthalten sind, ganz unbearbeitet blieb. Ich habe mir daher zunächst die Aufgabe gestellt, den Begriff einer mehrfach ausgedehnten Grösse aus allgemeinen Grössenbegriffen zu construiren. Es wird daraus hervorgehen, dass eine mehrfach ausgedehnte Grösse ver-

1) Diese Abhandlung ist am 10. Juni 1854 von dem Verfasser bei dem zum Zweck seiner Habilitation veranstalteten Colloquium mit der philosophischen Facultät zu Göttingen vorgelesen worden. Hieraus erklärt sich die Form der Darstellung, in welcher die analytischen Untersuchungen nur angedeutet werden konnten; in einem besonderen Aufsatze gedenke ich demnächst auf dieselben zurückzukommen.

Braunschweig, im Juli 1867. R. Dedekind.

Hình 45

Tuy nhiên, ông lưu ý, "Mối quan hệ giữa những giả định trước này vẫn còn mơ hồ; chúng ta không thấy liệu mọi mối liên kết giữa chúng là tất yếu tới phạm vi nào hay mọi mối liên kết giữa chúng thậm chí có là khả dĩ về mặt *tiên nghiệm* hay không". Trong số các lý thuyết hình học khả dĩ, Riemann bàn đến *hình học eliptic*, loại hình học mà người ta có thể gặp trên một mặt cầu (hình 41c). Lưu ý rằng trong loại hình học như vậy thì khoảng cách ngắn nhất giữa hai điểm không phải là một đường thẳng mà là một đoạn thuộc vòng tròn lớn có tâm trùng với tâm của hình cầu. Các hãng hàng không cũng đã biết tận dụng thực tế này - các chuyến bay từ Mỹ đến châu Âu không theo đường thẳng như ta thấy trên bản đồ mà là theo một vòng tròn lớn ban đầu hướng về phía bắc. Bạn có thể dễ dàng kiểm chứng rằng hai vòng tròn lớn bất kỳ cắt nhau tại hai điểm đối kính với nhau (tức là hai điểm này là đầu mút của một đường kính - ND). Chẳng hạn, hai kinh tuyến trên Trái Đất, dường như là song song ở xích đạo, sẽ cắt nhau tại hai cực. Hệ quả là, không giống như hình học Euclid, trong đó chỉ có chính xác một đường thẳng song song đi qua một điểm ở bên ngoài, và cũng không giống hình học hyperbolic, trong đó có ít nhất hai đường thẳng song song, trong hình học eliptic trên mặt cầu *không có* một đường thẳng song song nào hết. Riemann còn đưa các khái niệm phi Euclid tiến một bước xa hơn và đưa vào các hình học trong các không gian cong với 3, 4, và thậm chí nhiều chiều hơn. Một trong những khái niệm then chốt được mở rộng bởi Riemann là khái niệm *độ cong* - đó là tỷ lệ mà một đường cong hay một bề mặt bị uốn cong. Chẳng hạn, bề mặt của một cái vỏ trứng cong ít hơn ở xung quanh thân của nó so với đường cong đi qua một trong các đầu nhọn của nó. Riemann còn tiếp tục mở rộng, đưa ra định nghĩa toán học chính xác về độ cong trong các không gian có số chiều bất kỳ. Trong chính quá trình đó, ông đã củng cố vững chắc sự gắn bó mật thiết giữa đại số và hình học đã được khởi xướng bởi Descartes. Trong các công trình của Riemann, các phương trình với số biến bất kỳ đã tìm thấy những đối ứng hình học của chúng và những khái niệm mới từ các hình học tiên tiến này đã trở thành bạn đồng hành của các phương trình.

Vị thế cao trọng của hình học Euclid không phải là nạn nhân duy nhất của những chân trời mới mà thế kỷ 19 đã mở ra cho hình học. Ý tưởng của Kant về không gian cũng không tồn tại được lâu hơn. Hãy nhớ lại là Kant đã khẳng định rằng thông tin từ các giác quan của chúng ta được tổ chức chỉ theo các khuôn mẫu Euclid trước khi được ghi lại trong ý thức của chúng ta. Các nhà hình học thế kỷ 19 nhanh chóng phát triển trực giác trong các hình học phi Euclid và học để trải nghiệm thế giới theo những đường hướng này. Sự nhận thức về không gian theo Euclid xét cho cùng hóa ra là do học hỏi chứ không phải là do trực giác. Tất cả những sự phát triển đầy kịch tính này đã dẫn dắt nhà toán học vĩ đại người Pháp Henri Poincaré (1854-1912) đi tới kết luận rằng các tiên đề hình học "không phải là trực giác tổng hợp *tiên nghiệm* mà cũng không phải là thực tiễn kinh nghiệm. Chúng là *những quy ước* [tác giả nhấn mạnh]". Sự lựa chọn của chúng ta trong số tất cả những quy ước khả dĩ được dẫn dắt bởi những thực tế kinh nghiệm, song vẫn còn tự do". Nói cách khác, Poincaré coi các tiên đề chỉ như là "những định nghĩa trá hình" mà thôi.

Quan điểm của Poincaré không phải bắt nguồn chỉ từ những hình học phi Euclid được mô tả cho đến nay mà còn bởi sự phát triển mạnh mẽ của các hình học khác, mà trước khi kết thúc thế kỷ 19 hầu như vẫn còn nằm ngoài tầm tay. Chẳng hạn như trong *hình học xạ ảnh* (thu được khi một hình ảnh trên phim được chiếu trên màn hình), người ta có thể hoán đổi theo nghĩa đen vai trò của các điểm và đường, vì vậy mà các định lý về các điểm và đường (theo đúng trật tự này) sẽ biến thành các định lý về các đường và điểm. Trong *hình học vi phân*, các nhà toán học sử dụng phép tính vi tích phân để nghiên cứu các tính chất hình học địa phương (cục bộ) của các không gian toán học khác nhau, như mặt cầu hay hình xuyến (chẳng hạn như chiếc xăm ôtô -ND). Những loại hình học này và các loại khác dường như, chí ít là thoạt đầu, là những phát minh tài tình của những trí tuệ toán học giàu tưởng tượng, chứ không phải là sự mô tả chính xác không gian vật lý. Vậy thì khi đó làm thế nào người ta vẫn còn có thể bảo vệ được quan niệm về Thượng đế như là một nhà toán học? Xét cho cùng, nếu như "Thượng đế từng hình học hóa" (một câu nói được nhà sử học Plutarch cho là của Plato), thì trong số nhiều loại hình học kể trên loại hình học nào là cái hình học thần thánh này?

Sự nhận thức sâu sắc rất nhanh về những thiếu sót của hình học Euclid cổ điển đã buộc các nhà toán học phải xem xét lại một cách nghiêm túc những nền tảng của toán học nói chung, và mối quan hệ giữa toán học và lôgic nói riêng. Chúng ta sẽ còn trở lại chủ đề quan trọng này ở Chương 7. Ở đây tôi chỉ xin lưu ý rằng chính quan niệm về sự hiển nhiên của các tiên đề cũng đã bị phá vỡ. Do đó, trong khi thế kỷ 19 còn chứng kiến sự phát triển đáng kể khác trong đại số và giải tích, thì cuộc cách mạng về hình học có thể đã có những hậu quả có ảnh hưởng lớn nhất đến quan điểm về bản chất của toán học.

Về không gian, các con số và con người

Tuy nhiên, trước khi các nhà toán học có thể chuyển sang chủ đề có tính bao quát về những nền tảng của toán học, thì một vài vấn đề "nhỏ hơn" đòi hỏi phải có sự chú ý tức thì. Trước hết, việc các hình học phi Euclid được phát biểu và công bố không nhất thiết có nghĩa chúng là những đứa con hợp pháp của toán học. Đã có một nỗi lo thường trực về sự không nhất quán - đó là khả năng mà việc đưa những loại hình học này đến các hệ quả lôgic cuối cùng của chúng sẽ tạo ra những mâu thuẫn không thể giải quyết được. Vào những năm 1870, Eugenio Beltrami (1835-1900) người Italia và Felix Klein (1849-1925) người Đức đã chứng minh được rằng chừng nào mà hình học Euclid vẫn còn là phi mâu thuẫn thì các hình học phi Euclid cũng sẽ như thế. Điều này còn để ngỏ một câu hỏi còn lớn hơn nữa, đó là sự vững chắc của nền tảng của hình học Euclid. Vì vậy có một vấn đề quan trọng có liên quan. Hầu hết các nhà toán học coi các loại hình học mới này may lắm như là những thứ của lạ để giải trí. Trong khi hình học Euclid có được phần lớn sức mạnh lịch sử của nó từ việc nó được xem như là sự mô tả của không gian thực, thì các hình học phi Euclid ban đầu được nhận thức là chẳng có bất kỳ mối liên hệ nào với thực tại vật lý. Hệ quả là, các hình học phi Euclid bị nhiều nhà toán học đối xử như người anh em họ nghèo của hình học Euclid. Henri Poincaré có vẻ dễ dãi hơn một chút so với tất cả, song ngay cả ông cũng khẳng định rằng nếu con người được chuyển tới một thế giới mà ở đó hình học được chấp nhận là phi Euclid thì điều "chắc chắn là chúng ta vẫn sẽ không thấy thuận tiện hơn để thay đổi" từ hình học Euclid sang phi Euclid. Vì vậy có hai vấn đề lớn được đặt ra: (1) Liệu hình học (nói riêng) và các nhánh khác của toán học (nói chung) có thể được thiết lập trên những nền tảng lôgic là các tiên đề vững chắc hay không? và (2) Mối quan hệ, nếu có, giữa toán học và thế giới vật lý là gì?

Một số nhà toán học đã chấp nhận một cách tiếp cận thực dụng đối với các nền tảng của hình học. Thất vọng bởi phát hiện ra rằng điều mà họ vẫn xem như là những chân lý tuyệt đối hóa ra lại chỉ dựa vào kinh nghiệm hơn là sự chặt chẽ, và họ đã chuyển sang số học - môn toán học của các con số. Hình học giải tích của Descartes, mà trong đó các điểm trên mặt phẳng được đồng nhất với các cặp số có thứ tự, các đường tròn với các cặp số thỏa mãn một phương trình nào đó (xem Chương 4), v.v, đã cung cấp chính những công cụ cần thiết để tái dựng lại nền tảng của hình học dựa trên các con số. Nhà toán học người Đức Jacob Jacobi (1804-51) có lẽ muốn nhấn mạnh những ngọn triều thay đổi này khi ông thay câu nói của Plato "Thượng đế từng hình học hóa" bằng câu châm ngôn "Thượng đế từng số học hóa". Tuy nhiên, theo một nghĩa nào đó, những cố gắng này chẳng qua chỉ là chuyển vấn đề sang một nhánh toán học khác mà thôi. Trong khi nhà toán học vĩ đại người Đức David Hilbert (1862-1943) đã thành công trong việc chứng minh hình học Euclid là phi mâu thuẫn chừng nào số học là phi mâu thuẫn, thì sự phi mâu thuẫn của số học vẫn còn xa mới xác lập được một cách rõ ràng vào thời điểm đó.

Về mối quan hệ giữa toán học và thế giới vật lý, một tình cảm mới vẫn còn đang lơ lửng. Trong nhiều thế kỷ, sự giải thích toán học như là cách đọc vũ trụ đã liên tục được đề cao một cách mạnh mẽ. Sự toán học hóa khoa học bởi Galileo, Descartes, Newton, anh em nhà Bernoulli, Pascal, Lagrange, Quetelet và những người khác được xem như là bằng chứng mạnh mẽ chứng tỏ bản thiết kế của tự nhiên là dựa vào toán học. Người ta có thể lập luận một cách rõ ràng rằng nếu toán học không phải là ngôn ngữ của vũ trụ thì tại sao nó lại có thể vận hành tốt như là nó đã làm được trong việc giải thích mọi điều từ các định luật cơ bản của tự nhiên cho đến các đặc tính của con người.

Để đảm bảo chắc chắn, các nhà toán học đã ý thức rằng toán học chỉ liên quan với các dạng Platonic khá trừu tượng, song chúng lại được xem như là những lý tưởng hóa hợp lý của các yếu tố vật lý thực sự. Trong thực tế, cảm giác rằng cuốn sách tự nhiên được viết bằng ngôn ngữ toán học đã ăn sâu bén rễ đến mức nhiều nhà toán học đã kiên quyết từ chối ngay cả việc nghiên cứu những khái niệm và cấu trúc toán học không liên quan trực tiếp đến thế giới tự nhiên. Chẳng hạn như ví dụ sau đây với Gerolamo Cardano đa tài (1501-76). Cardano là một nhà toán học tài năng, một thày thuốc nổi tiếng, và một người chơi cờ bạc bất đắc dĩ. Vào năm 1545, ông đã cho xuất bản một trong những cuốn sách có ảnh hưởng lớn nhất trong lịch sử của đại số - *Ars Magna (Nghệ thuật vĩ đại)*. Trong chuyên luận toàn diện này, Cardano đã nghiên cứu tỉ mỉ việc giải các phương trình đại số, từ phương trình bậc hai đơn giản (trong đó biến số có số mũ cao nhất là 2: x^2) cho đến những lời giải tiên phong cho các phương trình bậc 3 (x^3) và bậc 4 (x^4). Tuy nhiên, trong toán học cổ điển các đại lượng thường được giải thích như là những yếu tố hình học. Chẳng hạn, giá trị của ẩn số x được đồng nhất với một đoạn thẳng có độ dài bằng thế, lũy thừa bậc hai x^2

khi đó sẽ là diện tích còn lũy thừa bậc ba x^3 là hình khối có thể tích tương ứng. Do đó, trong chương đầu tiên của cuốn *Ars Magna*, Cardano đã giải thích:

> Chúng tôi xin kết luận sự xem xét chi tiết của chúng tôi về bậc ba, những thứ khác chỉ đơn thuần được đề cập đến, thậm chí nói chung là bỏ qua. Vì *positio* [bậc nhất] có liên quan đến đường thẳng, *quadratum* [bậc hai] liên quan đến mặt phẳng và *cubum* [bậc ba] liên quan đến vật rắn, nên sẽ là ngốc nghếch nếu chúng ta vượt quá điểm này. Tự nhiên không cho phép điều đó. Vì vậy, như sẽ thấy, tất cả mọi thứ dưới và bằng bậc ba đều được chứng minh một cách đầy đủ, song những thứ khác mà chúng ta thêm vào, hoặc là do cần thiết hoặc là do tò mò, thì chúng ta cũng không thể đi quá cái giới hạn vừa vạch ra đó.

Nói cách khác, Cardano biện luận rằng vì thế giới tự nhiên được cảm nhận bởi các giác quan của chúng ta chỉ có 3 chiều, nên sẽ là ngốc nghếch khi các nhà toán học lại bận tâm đến số chiều cao hơn hay các phương trình bậc cao hơn.

Một ý kiến tương tự cũng được đưa ra bởi nhà toán học Anh John Wallis (1616-1703), mà Newton đã học được phương pháp phân tích từ tác phẩm *Arithmetica Infinitorum* của ông. Trong một cuốn sách quan trọng khác, cuốn *Chuyên luận về Đại số học*, Wallis lần đầu tiên đã tuyên bố: "Tự nhiên, nói một cách đúng mực, không thừa nhận có hơn *ba* chiều". Sau đó ông còn nói thêm rõ hơn:

> Một đường được vẽ thêm vào một đường sẽ tạo nên một mặt phẳng hay một bề mặt; bề mặt này lại được vẽ thêm

> vào một đường sẽ tạo nên một hình khối. Nhưng nếu hình khối này được vẽ thêm vào một đường, hay một mặt phẳng được vẽ thêm mặt phẳng khác thì sẽ tạo thành cái gì? Một mặt phẳng-mặt phẳng ư? Đây quả là một con quái vật trong tự nhiên, và thậm chí còn khó chấp nhận hơn con *Chimera* [con quái vật thở ra lửa trong thần thoại Hy Lạp, là một sự kết hợp giữa rắn, sư tử và dê] hay một con *Nhân Mã* [con vật trong thần thoại Hy Lạp, có phần trên là người và cơ thể và chân là ngựa]. Vì chiều dài, chiều rộng và chiều cao tạo nên toàn bộ *Không gian*. Cả trí tưởng tượng của chúng ta cũng không hình dung nổi làm thế nào lại có được Chiều thứ tư ngoài Ba chiều này.

Một lần nữa, lôgic của Wallis ở đây thật rõ ràng: không thể có chuyện ngay cả trong tưởng tượng một hình học lại không mô tả được không gian thực.

Những quan điểm rồi cuối cùng cũng bắt đầu thay đổi. Các nhà toán học ở thế kỷ 18 là những người đầu tiên xem thời gian là một chiều thứ tư tiềm năng. Trong một bài báo nhan đề “Chiều”, được công bố năm 1754, nhà vật lý Jean D’Alembert (1717-83) đã viết:

> Tôi đã tuyên bố ở trên rằng không thể hình dung được có nhiều hơn ba chiều. Tuy nhiên, một người có tài, người quen của tôi, đã khẳng định rằng người ta có thể coi thời gian như là một chiều thứ tư, và rằng tích của thời gian với tính hình khối, theo một cách nào đó, là tích của bốn chiều. Ý tưởng này có thể là thách thức song dường như với tôi nó có giá trị nhất định chứ không phải chỉ là sự mới lạ.

Nhà toán học vĩ đại Joseph Lagrange thậm chí còn tiến một bước xa hơn, ông tuyên bố khẳng định hơn vào năm 1797:

> Vì vị trí của một điểm trong không gian phụ thuộc vào ba tọa độ vuông góc, nên các tọa độ này trong một bài toán cơ học được hiểu như là một hàm số của t [thời gian]. Vì vậy, chúng ta có thể coi cơ học như là một hình học bốn chiều, và cơ học giải tích như là sự mở rộng của hình học giải tích.

Những ý tưởng táo bạo này đã mở toang cánh cửa cho sự mở rộng toán học mà trước đây được xem như là không thể tưởng tượng nổi - các loại hình học với số chiều bất kỳ - và hoàn toàn không cần đếm xỉa đến câu hỏi liệu những hình học này có mối liên hệ nào với không gian tự nhiên hay không.

Kant có thể đã sai khi tin rằng các giác quan cảm nhận không gian của chúng ta chỉ theo các khuôn mẫu Euclid, nhưng lại không hề nghi vấn rằng sự tri giác của chúng ta vận hành một cách tự nhiên và trực giác nhất chỉ trong không gian không nhiều hơn ba chiều. Chúng ta tương đối dễ dàng hình dung thế giới ba chiều của chúng ta trông như thế nào trong vũ trụ hai chiều của những cái bóng của Plato, nhưng việc vượt quá ba đến số chiều cao hơn nữa thì thực sự phải đòi hỏi trí tưởng tượng của các nhà toán học.

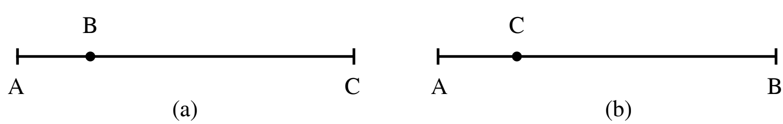
Một số công trình đột phá trong việc xử lý *hình học n-chiều* - hình học với số chiều bất kỳ - đã được thực hiện bởi Hermann Günther Grassmann (1809-77). Grassmann, một trong 12 người con và bản thân ông cũng là cha của 11 đứa trẻ, là một giáo viên phổ thông nhưng chưa bao giờ được đào tạo toán học ở bất kỳ trường đại học nào. Trong suốt cuộc đời mình, ông đã nhận được sự ca ngợi cho những công trình của ông trong lĩnh vực ngôn ngữ (đặc biệt là những nghiên cứu của ông về chữ Phạn và chữ Gothic) nhiều hơn là những thành tựu của ông trong lĩnh vực toán học. Một trong những người viết tiểu sử về ông đã viết: "Dường như số mệnh của Grassmann là cần phải được tái khám phá lại nhiều lần, mỗi một lần như thể ông sắp thực sự bị quên lãng kể từ khi ông qua đời". Tuy nhiên, Grassmann chính là người đã sáng tạo nên khoa học trừu tượng về "không gian," mà trong đó hình học thông thường chỉ là một trường hợp đặc biệt. Grassmann đã công bố những ý tưởng tiên phong của mình (khởi nguồn cho một nhánh toán học có tên là *đại số tuyến tính*) vào năm 1844, trong một cuốn sách thường được gọi là *Ausdehnungslehre* (có nghĩa là *Lý thuyết về sự mở rộng*; còn tên đầy đủ là *Lý thuyết mở rộng tuyến tính: Một nhánh mới của toán học*).

Trong lời nói đầu của cuốn sách, Grassmann đã viết: "Hình học không thể nào được xem xét... như là một nhánh của toán học; thay vì thế, hình học liên quan đến cái gì đó thực sự đã có trong tự nhiên, mà cụ thể là không gian. Tôi cũng đã nhận thấy rằng phải có một nhánh toán học, mà bằng một cách thuần túy trừu tượng, sản xuất ra những định luật tương tự như các định luật của hình học".

Đây là một quan điểm mới hoàn toàn về bản chất của toán học. Với Grassmann, hình học truyền thống - di sản của những người cổ Hy Lạp - nghiên cứu không gian tự nhiên và vì vậy không thể được xem như là một nhánh thực sự của toán học trừu tượng được. Toán học với ông là một cấu trúc trừu tượng của bộ não con người, nó không nhất thiết phải có bất kỳ ứng dụng nào vào thế giới thực.

Thật thú vị khi đi theo dòng suy nghĩ bề ngoài có vẻ như tầm thường đã đưa Grassmann trên con đường dẫn tới lý thuyết của ông về đại số hình học. Ông đã bắt đầu với công thức đơn giản AB+BC=AC, điều này xuất hiện trong bất kỳ cuốn sách hình học nào nói về chiều dài của các đoạn thẳng (xem H. 46a). Tuy nhiên, ở đây, Grassmann đã nhận thấy có điều gì đó thú vị. Ông khám phá ra rằng công thức này vẫn đúng bất kể thứ tự của các điểm A, B, C chừng nào người ta không giải thích AB, BC và v.v. chỉ là các độ dài, mà còn gán cho chúng một "hướng", sao cho BA = - AB. Chẳng hạn, nếu C nằm giữa A và B (như H. 46b), thì AB = AC + CB, nhưng vì CB = - BC nên AB = AC - BC và bằng cách cộng BC vào cả hai về ta sẽ tìm lại được công thức ban đầu AB + BC = AC.

Bản thân điều này đã rất thú vị, song sự mở rộng của Grassmann thậm chí còn chứa đựng nhiều điều ngạc nhiên hơn. Lưu ý rằng nếu chúng ta làm việc với đại số thay vì hình học thì một biểu thức như AB thường được ký hiệu là tích A × B. Trong trường hợp đó, giả thiết của Grassmann BA = - AB sẽ trái với một trong những luật bất khả xâm phạm của số học: hai đại lượng nhân với nhau sẽ cho cùng một kết quả bất kể thứ tự các đại lượng đó là như thế nào. Grassmann đã đối mặt với khả năng rắc rối này và đã phát minh ra một đại số nhất quán mới (được gọi là *đại số ngoài*) bao gồm cả một vài quá trình nhân và đồng thời có thể xử lý được hình học với số chiều bất kỳ.



Hình 46

Đến những năm 1960, hình học *n*-chiều mới lan rộng như nấm sau mưa. Không chỉ bài thuyết trình có ảnh hưởng mạnh mẽ của Riemann mới xác lập được các không gian có độ cong bất kỳ và có số chiều tùy ý như là một lĩnh vực nghiên cứu cơ bản, mà các nhà toán học khác như Arthur Cayley và James Sylvester ở Anh, Ludwig Schläfli ở Thụy sỹ cũng bổ sung những đóng góp độc đáo của riêng họ vào lĩnh vực này. Các nhà toán học bắt đầu cảm thấy rằng họ đang được giải phóng khỏi những hạn chế mà trong nhiều thế kỷ đã trói buộc toán học chỉ vào những khái niệm không gian và số. Những sự trói buộc này rất nghiêm trọng về mặt lịch sử đến mức tới tận thế kỷ 18, nhà toán học có sức sáng tạo dồi dào người Thụy sỹ là Leonhard Euler (1707-83) đã phải thốt lên rằng "toán học, nói chung, là một khoa học về lượng; hay, khoa học nghiên cứu các phương tiện để đo lường các lượng". Chỉ đến thế kỷ 19 thì ngọn gió thay đổi mới bắt đầu thổi.

Thứ nhất, sự đưa vào các không gian hình học trừu tượng và khái niệm vô hạn (cả trong hình học và lý thuyết tập hợp) đã làm mờ nhạt đi ý nghĩa của "lượng" và "đo lường" đến mức khó tưởng tượng. Thứ hai, những nghiên cứu toán học trừu tượng được nhân lên rất nhanh chóng đã giúp cho việc tách biệt toán học ra xa hơn nữa với thực tại vật lý, trong khi đó lại thổi sức sống và "tồn tại" vào chính những trừu trượng hóa đó.

Georg Cantor (1845-1918), người sáng tạo ra *lý thuyết tập hợp*, đã đặc trưng cho tinh thần tự do mới được tìm thấy của toán học bằng "bản tuyên ngôn độc lập" sau: "Toán học đang trong giai đoạn phát triển tự do của mình và chỉ bị ràng buộc trong sự tôn trọng hiển nhiên rằng các khái niệm của nó phải vừa nhất quán với nhau vừa ở trong mối quan hệ chính xác, theo định nghĩa, với những khái niệm đã được đưa vào trước đó, đã được xác lập và sử dụng." Nhà đại số Richard Dedekind (1831-1916) sáu năm sau đã bổ sung thêm: "Tôi coi khái niệm số hoàn toàn độc lập với các quan niệm hay trực giác về không gian và thời gian... Số là những sáng tạo tự do của trí tuệ con người". Như vậy, cả Cantor và Dedekin đều xem toán học như một sự nghiên cứu có tính khái niệm và trừu tượng, chỉ bị giới hạn bởi yêu cầu về tính nhất quán, và không có bất cứ nghĩa vụ nào liên quan đến việc tính toán hay ngôn ngữ của thực tại vật lý. Như Cantor đã tổng kết: "*Bản chất của toán học* hoàn toàn nằm ở sự *tự do* của nó".

Vào cuối thế kỷ 19, hầu hết các nhà toán học đều thừa nhận quan điểm của Cantor và Dedekind về sự tự do của toán học. Mục tiêu của toán học đã thay đổi từ việc tìm kiếm các chân lý về tự nhiên sang việc xây dựng các cấu trúc trừu tượng - tức hệ thống các tiên đề - và đi tìm tất cả các hệ quả lôgic của các tiên đề đó.

Người ta có thể đã nghĩ rằng điều này sẽ đặt dấu chấm hết cho mọi trăn trở về câu hỏi: toán học đã được khám phá hay là phát minh ra. Nếu toán học không là gì khác hơn là một trò chơi, dẫu là một trò chơi phức tạp, được chơi theo các quy tắc được phát minh ra một cách tùy ý, thì rõ ràng là không có điểm nào để tin vào tính xác thực của các khái niệm toán học, lẽ nào không phải thế?

Thật đáng ngạc nhiên, sự tách rời khỏi thực tại vật lý lại truyền cho một số nhà toán học cảm xúc ngược lại. Thay vì kết luận rằng toán học là sự phát minh của con người, họ quay trở lại quan niệm ban đầu của trường phái Plato về toán học xem đó là một thế giới độc lập của chân lý, mà sự tồn tại của nó là có thực như vũ trụ vật lý vậy. Những nỗ lực liên kết toán học với vật lý được thực hiện bởi những " tân môn đệ của Plato" này như là sự học đòi làm toán học *ứng dụng*, trái ngược với thứ toán học thuần túy được cho là hoàn toàn không dính dáng với bất kỳ thứ gì là có tính chất vật lý. Dưới đây là những gì mà nhà toán học người Pháp Charles Hermite (1822-1901) viết trong bức thư gửi nhà toán học Hà Lan Thomas Joannes Stieltjes (1856-94) đề ngày 13 tháng 5 năm 1894: "Bạn thân mến của tôi", ông viết:

> Tôi rất hạnh phúc khi thấy anh sẵn sàng thay đổi bản thân thành một nhà tự nhiên học để quan sát các hiện tượng của thế giới số học. Học thuyết của anh cũng giống như của tôi; tôi tin rằng những con số và các hàm số của giải tích không phải là những sản phẩm tùy tiện của trí tuệ chúng ta; tôi nghĩ rằng chúng tồn tại bên ngoài chúng ta với cùng những đặc tính thiết yếu như những đối tượng của thực tại khách quan, và rằng chúng ta bắt gặp chúng hay khám phá ra chúng, và nghiên cứu chúng, đúng như các nhà vật lý, hóa học và động vật học mà thôi.

Nhà toán học người Anh G.H.Hardy, bản thân là người hành nghề toán học thuần túy, là một trong những nhà theo trường phái Plato hiện đại trực tính nhất. Trong một bài nói chuyện hùng hồn trước Hội vì tiến bộ khoa học Anh vào ngày 7 tháng 9 năm 1922, ông đã tuyên bố:

> Các nhà toán học đã xây dựng được một số lượng rất lớn các hệ thống hình học khác nhau. Euclid hay phi Euclid, với một, hai, ba hay số chiều bất kỳ. Tất cả các hệ thống này đều hoàn chỉnh và có giá trị như nhau. Chúng là hiện thân những kết quả mà các nhà toán học thu được khi quan sát thực tại của họ, một thực tại mạnh mẽ và vững chắc hơn nhiều so với thực tại mơ hồ và khó nắm bắt của vật lý học... Vì vậy, chức năng của một nhà toán học đơn giản là quan sát những sự kiện về chính hệ thống vững chắc và phức tạp đó của thực tại, sự phức hợp đẹp đẽ một cách đáng kinh ngạc của các mối quan hệ lôgic tạo nên đối tượng của khoa học của anh ta, như thể anh ta là một người thám hiểm nhìn về một dãy núi ở phía xa và ghi lại những kết quả quan sát của mình trên một chuỗi những tấm bản đồ, mà mỗi tấm là một nhánh của toán học thuần túy.

Rõ ràng là, ngay cả với những bằng chứng đương đại chỉ rõ bản chất tùy tiện của toán học, những môn đệ cực đoan của Plato vẫn không định buông vũ khí xuống. Hoàn toàn ngược lại, họ tìm thấy cơ hội để đào sâu vào, theo cách nói của Hardy, "thực tại của họ", thậm chí còn cảm thấy hưng phấn hơn là tiếp tục nghiên cứu những ràng buộc với thực tại vật lý. Tuy nhiên, bất chấp các quan điểm về thực tại siêu hình của toán học, có một điều đã trở nên rõ ràng. Ngay cả với sự tự do tưởng như không bị kiểm soát của toán học thì vẫn có một sự ràng buộc không thay đổi và không thể lay chuyển - đó là ràng buộc của sự nhất quán về lôgic. Các nhà toán học và triết học hơn bao giờ hết đã trở nên ý thức được rằng sợi dây rốn giữa toán học và lôgic là không thể bị cắt đứt. Điều này đã làm nảy sinh một ý tưởng khác: Liệu toàn bộ toán học có thể được xây dựng dựa trên một nền tảng lôgic duy nhất không? Và nếu như có thể thì đó có phải là bí mật của tính hiệu quả của toán học hay không? Hay ngược lại, liệu các phương pháp toán học có thể được sử dụng để nghiên cứu sự suy lý nói chung không? Trong trường hợp đó, toán học sẽ trở thành ngôn ngữ không chỉ của tự nhiên mà còn là ngôn ngữ của tư duy con người.

CHƯƠNG 7

CÁC NHÀ LÔGIC: TƯ DUY VỀ SUY LUẬN

Tấm bảng hiệu treo bên ngoài một cửa hiệu cắt tóc ở một ngôi làng viết: “Tôi chỉ cạo râu cho những người đàn ông trong làng không tự cạo được cho mình.” Nghe ra có vẻ rất hợp lý, phải không? Rõ ràng là những người đàn ông tự cạo được râu cho mình thì không cần tới dịch vụ cạo râu và lẽ tự nhiên là người thợ cắt tóc chỉ cạo râu cho tất cả những người còn lại. Nhưng, bạn có thể tự hỏi, vậy thì ai sẽ cạo râu cho người thợ cắt tóc? Nếu ông ta tự cạo cho mình thì theo quy định của cửa hiệu, ông ta nằm trong số những người ông ta không được cạo. Mặt khác, nếu ông ta không cạo được cho mình thì một lần nữa theo tấm bảng hiệu, ông ta phải thuộc số những người ông ta sẽ được cạo! Vậy ông ấy sẽ cạo hay không cạo cho mình? Những vấn đề nhỏ hơn nhiều, về mặt lịch sử, cũng đã gây ra những cuộc cãi lộn nghiêm trọng trong gia đình. Nghịch lý trên đã được đưa ra bởi Bertrand Russell (1872-1970), một trong những nhà lôgic và triết học kiệt xuất thế kỷ 20, đơn giản là để chứng minh rằng trực giác về lôgic của con người rất dễ mắc sai lầm. Các nghịch lý phản ánh những tình huống mà trong đó những giả thiết bề ngoài có thể chấp nhận được nhưng lại dẫn đến những kết luận không thể chấp nhận được. Trong ví dụ ở trên, người thợ cạo vừa được cạo và vừa không được cạo cho mình. Vậy nghịch lý cụ thể này liệu có thể giải quyết được không? Một giải pháp khả dĩ cho nghịch lý này, như được trình bày một cách chặt chẽ ở trên, là rất đơn giản: người thợ cạo đó là một phụ nữ! Trái lại, nếu chúng ta biết trước rằng người thợ cạo đó phải là đàn ông, thì cái kết luận vô lý chẳng qua là kết quả của việc chấp nhận giả thiết ngay từ đầu. Nói cách khác, một thợ cạo như vậy đơn giản là không thể tồn tại. Nhưng chuyện này thì có liên quan gì đến toán học? Hóa ra toán học và lôgic có quan hệ mật thiết với nhau. Dưới đây là sự mô tả về mối liên kết này của chính Russell:

> Toán học và lôgic, nói về mặt lịch sử, là những nghiên cứu hoàn toàn riêng biệt. Toán học gắn với khoa học, lôgic gắn với tiếng Hy Lạp. Nhưng cả hai đều đã phát triển ở thời hiện đại: lôgic đã trở nên toán học hơn và toán học thì trở nên lôgic hơn. Hệ quả là giờ đây [1919] hoàn toàn không thể vẽ được vạch ranh giới giữa hai lĩnh vực đó; và thực tế thì hai là một. Chúng khác nhau như đứa con trai và người đàn ông: lôgic là tuổi trẻ của toán học và toán học là tuổi trưởng thành của lôgic.

Russell hàm ý ở đây rằng, phần lớn thì *toán học có thể được quy về lôgic*. Nói cách khác, những khái niệm cơ bản của toán học, thậm chí cả những đối tượng như các con số, thực tế đều có thể được định nghĩa thông qua các luật cơ bản của luận lý. Hơn nữa, sau đó Russell còn lập luận rằng có thể sử dụng những định nghĩa đó kết hợp với các nguyên lý lôgic để sinh ra những định lý toán học.

Ban đầu, quan điểm này về bản chất của toán học (được gọi là *lôgic luận*) đã nhận được sự tán thưởng của cả những người xem toán học không gì khác hơn là một trò chơi tinh vi, do con người phát minh ra (*người theo chủ nghĩa hình thức*), lẫn những người theo trường phái Plato đầy rắc rối. Nhóm đầu tiên ban đầu vui mừng khi thấy một tập hợp những “trò chơi” có vẻ như không liên quan gì với nhau lại hợp nhất thành một “mẹ của mọi trò chơi”. Còn nhóm sau nhìn thấy tia hy vọng trong ý tưởng rằng toàn bộ toán học đều có thể đã xuất phát từ cùng một nguồn rõ ràng. Trong mắt của các nhà Platonic, điều này đã làm tăng xác suất của một nguồn gốc siêu hình duy nhất. Khỏi cần phải nói, một nguồn gốc duy nhất của toán học không thể không, ít nhất là về nguyên tắc, đồng nhất với nguyên nhân tạo ra sức mạnh của nó.

Để cho đầy đủ, tôi cũng phải lưu ý rằng có một trường phái tư duy - gọi là *trực giác luận* - trái ngược hoàn toàn với cả lôgic luận và hình thức luận. Người giơ cao bó đuốc của trường phái này là một nhà toán học Hà Lan khá cuồng tín Luitzen E. J. Brouwer (1881-1966). Brouwer tin rằng các số tự nhiên có được từ trực giác của con người về thời gian và về những thời điểm rời rạc trong kinh nghiệm của chúng ta. Với ông, không có chuyện toán học là kết quả của tư duy con người, và vì vậy ông thấy không cần những luật lôgic phổ quát loại mà Russell hình dung. Tuy nhiên, Brouwer còn đi xa hơn nhiều và ông tuyên bố rằng những thực thể toán học duy nhất có ý nghĩa là những thực thể xây dựng một cách tường minh dựa trên các số tự nhiên, bằng cách sử dụng một số hữu hạn các bước. Do đó, ông đã loại bỏ những phần lớn của toán học mà đối với chúng các chứng minh có tính kiến thiết là không thể. Một khái niệm lôgic khác bị Brouwer phủ nhận là *nguyên lý bài trung* - quy định rằng mọi mệnh đề chỉ có thể là đúng hoặc sai. Thay vì thế, ông cho phép các mệnh đề nấn ná ở trạng thái lơ lửng thứ ba mà trong đó chúng "chưa được quyết định". Chính những mệnh đề này, và một số ít những ràng buộc giới hạn của trực giác luận phần nào đã làm mất giá trị của trường phái tư duy này. Tuy nhiên, các ý tưởng của trực giác luận cũng đã dự đoán trước được một số phát hiện của các nhà khoa học về nhận thức liên quan đến câu hỏi con người thực sự có được tri thức toán học như thế nào (một chủ đề sẽ được đề cập đến trong Chương 9), và họ cũng đã thông tin cho biết những cuộc tranh luận của một số nhà triết học hiện đại của toán học (như Michael Dummett). Sự tiếp cận của Dummett về cơ bản là ngôn ngữ, khi tuyên bố một cách mạnh mẽ rằng "ý nghĩa của một mệnh đề toán học xác định và được xác định một cách thấu đáo bằng việc *sử dụng* nó."

Nhưng một mối quan hệ chặt chẽ như vậy giữa toán học và lôgic đã được phát triển như thế nào? Và cái chương trình lôgic luận ấy liệu có là khả thi? Dưới đây tôi sẽ tổng quan lại một cách ngắn gọn một số cột mốc quan trọng của bốn thế kỷ gần đây.

Lôgic học và Toán học

Về mặt truyền thống, lôgic học nghiên cứu các mối quan hệ giữa những khái niệm và các mệnh đề cùng với những quá trình mà nhờ đó các suy luận đúng có thể được đúc rút ra từ những mối quan hệ đó. Một ví dụ đơn giản, những suy luận có dạng tổng quát "mọi X là Y, một số Z là X; vậy một số Z là Y" được xây dựng để đảm bảo một cách tự động sự đúng đắn của kết luận chừng nào mà các giả thiết là đúng. Chẳng hạn, "mọi nhà viết tiểu sử là một tác giả; một số nhà chính trị là nhà viết tiểu sử; vậy một số nhà chính trị là tác giả" tạo ra một kết luận đúng. Trái lại, suy luận có dạng tổng quát "mọi X là Y, một số Z là Y; vậy một số Z là X" là không đúng, vì người ta có thể tìm ra ví dụ trong đó mặc dù giả thiết là đúng nhưng kết luận lại sai. Ví dụ: "mọi người là động vật có vú; một số động vật có sừng là động vật có vú; vậy một số động vật có sừng là người."

Chừng nào một số quy tắc được tuân theo thì sự đúng đắn của một lập luận không phụ thuộc vào đối tượng của các mệnh đề. Chẳng hạn:

> Hoặc người quản gia đã giết chết nhà triệu phú hoặc con gái ông ta giết chết ông ta;
>
> Con gái ông ta không giết chết ông ta;
>
> Vậy, người quản gia đã giết chết nhà triệu phú.

Là một suy diễn đúng. Tính hợp lý của lập luận này hoàn toàn không dựa vào quan điểm của chúng ta về người quản gia hoặc vào mối quan hệ giữa nhà triệu phú và con gái của ông ta. Sự đúng đắn ở đây được đảm bảo bởi thực tế là các mệnh đề có dạng tổng quát "nếu p hoặc q, và không q thì p" đã tạo ra một chân lý lôgic.

Bạn có thể nhận thấy rằng trong hai ví dụ đầu tiên, X, Y và Z đóng vai trò rất giống với các biến số trong các phương trình toán học - chúng đánh dấu vị trí mà các biểu thức có thể được thay thế vào, tương tự như các giá trị số được thay cho các biến số trong đại số. Tương tự như vậy, tính chân lý trong suy luận "nếu p hoặc q, và không q thì p" gợi nhớ đến các tiên đề trong hình học Euclid. Tuy nhiên, phải mất gần hai thiên niên kỷ chiêm nghiệm lôgic, các nhà toán học mới để tâm nhiều đến sự tương tự này.

Người đầu tiên thử kết hợp hai lĩnh vực lôgic và toán học thành một thứ "toán học phổ quát" là nhà toán học và triết học duy lý người Đức Gottfried Wilheim Leibniz (1646-1716). Leibniz, người được đào tạo chính quy về luật, nhưng làm hầu hết những công trình của ông về toán học, vật lý và triết học vào thời gian rảnh rỗi. Trong suốt cuộc đời mình, ông nổi tiếng nhất vì đã xây dựng một cách độc lập (và gần như đồng thời) với Newton những nền tảng của phép tính vi tích phân (và cũng vì sự tranh cãi gay gắt về quyền tác giả giữa hai người). Trong một bài tiểu luận được hình thành gần như hoàn toàn ở tuổi 16, Leibniz đã suy xét đến một ngôn ngữ phổ quát của suy luận, hay *characteristica universalis*, mà ông coi như là công cụ tư duy tối hậu. Kế hoạch của ông là biểu diễn những ý niệm và các ý tưởng đơn giản bằng các ký hiệu, các ý niệm và ý tưởng phức tạp hơn bằng những tổ hợp thích hợp của các ký hiệu cơ bản đó. Leibniz hy vọng có thể tính toán được một cách thực sự giá trị chân lý của một mệnh đề bất kỳ, trong bất cứ lĩnh vực khoa học nào mà chỉ bằng các phép tính đại số. Ông tiên đoán rằng với các phép tính lôgic thích hợp, những tranh cãi trong triết học sẽ được giải quyết bằng tính toán. Thật không may là Leibniz đã không tiến được xa trong việc phát triển thực sự đại số học lôgic của mình. Ngoài nguyên lý chung về một cuốn "sách vỡ lòng về tư duy", hai đóng góp chủ yếu của ông, đó là phát biểu một cách rõ ràng khi nào chúng ta cần phải xem hai điều là tương đương và sự nhận biết phần nào rõ ràng rằng không có mệnh đề nào lại đồng thời vừa đúng vừa sai. Do đó, mặc dù thậm chí những ý tưởng của Leibniz là rất lỗi lạc song chúng gần như hoàn toàn không được chú ý tới.

Lôgic lại trở nên thịnh hành hơn một lần nữa vào giữa thế kỷ 19, và sự đột phát quan tâm trở lại này đã tạo ra những tác phẩm quan trọng, mà đầu tiên là của Augustus De Morgan (1806-71) và sau đó là George Boole (1815-64), Gottlob Frege (1848-1925) và Giuseppe Peano (1858-1932).

De Morgan là một nhà văn viết nhiều một cách phi thường, người đã thực sự công bố tới hàng ngàn bài báo và cuốn sách thuộc nhiều chủ đề khác nhau về toán học, lịch sử toán học và triết học. Hai tác phẩm khác thường hơn của ông là cuốn almanac (sách lịch) về trăng tròn (trong cả thiên niên kỷ) và cuốn toát yếu những loại toán học lạ thường. Khi có lần được hỏi tuổi, ông đã trả lời: "Tôi x tuổi vào năm x^2". Bạn có thể dễ dàng kiểm tra số duy nhất, mà khi bình phương lên cho một số nằm trong khoảng từ 1806 đến 1871 (năm sinh và năm mất của De Morgan) là 43. Những đóng góp độc đáo nhất của Morgan có lẽ vẫn là trong lôgic học, lĩnh vực mà ông vừa mở rộng một cách đáng kể phạm vi các phép tam đoạn luận của Aristotle vừa thử lại cách tiếp cận đại số đối với suy luận. De Morgan xem xét lôgic bằng con mắt của một nhà đại số và xem xét đại số bằng con mắt của một nhà lôgic. Ở một trong những bài báo của mình, ông đã trình bày quan điểm nhìn xa trông rộng này: "Với đại số thì chúng ta phải tìm kiếm công dụng quen thuộc nhất của các hình thái lôgic... nhà đại số học đã sống trong bầu không khí cao hơn của tam đoạn luận, sự kết cấu không ngừng của mối quan hệ, trước khi nó được thừa nhận rằng có một bầu không khí như thế tồn tại."

Một trong những đóng góp quan trọng nhất của De Morgan với lôgic được biết là sự *lượng từ hóa vị từ*. Đây phần nào là một cái tên hơi khủng đối với cái mà người ta có thể xem như một sự bỏ sót đáng ngạc nhiên về phần đóng góp của các nhà lôgic thời kỳ cổ điển. Các môn đệ của Aristotle đã nhận thấy rất đúng rằng từ các giả thiết như "một số *Z* là *X*" và "một số *Z* là *Y*", không thể rút ra kết luận tất yếu nào về mối quan hệ giữa *X* và *Y*. Chẳng hạn, hai câu "một số người ăn bánh mỳ" và "một số người ăn táo" không cho phép đưa ra một kết luận dứt khoát nào về mối quan hệ giữa người ăn táo và người ăn bánh mì. Cho đến tận thế kỷ 19, các nhà lôgic cũng cho rằng để mối quan hệ bất kỳ giữa *X* và *Y* là tất yếu, thì mệnh đề trung gian ("*Z*" *ở* trên) phải là "phổ quát" (thường gọi là lượng từ "với mọi") ở một trong các giả thiết. Tức là, câu đó phải có cụm từ "với mọi *Z*". De Morgan cho rằng giả định đó là sai. Trong cuốn *Lôgic hình thức* (xuất bản năm 1847), ông đã chỉ ra rằng từ các giả thiết như "hầu hết *Z* là *X*" và hầu hết "Z là *Y*" thì tất yếu sẽ suy ra "một số *X* là *Y*". Chẳng hạn, từ hai giả thiết "hầu hết mọi người đều ăn bánh mì" và "hầu hết mọi người đều ăn táo" thì tất yếu suy ra "một số người ăn cả bánh mì và táo". De Morgan thậm chí còn đi xa hơn, ông đã đặt tam đoạn luận mới của mình dưới dạng lượng từ chính xác. Hãy hình dung là: tổng số *Z* là z, số *Z* và cũng là *X* là x, số Z và cũng là *Y* là y. Trong ví dụ ở trên, tổng số người là 100 (z = 100), trong số đó có 57 người ăn bánh mì (x = 57) và 69 người ăn táo (y = 69). Sau đó, De Morgan nhận thấy, phải có ít nhất ($x + y - z$) của *X* cũng là của *Y*. Tức là ít nhất có 26 người (57 + 69 - 100 = 26) ăn cả bánh mì và táo.

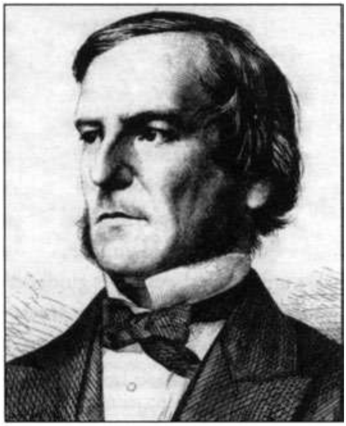
Không may là, phương pháp lượng từ hóa vị từ rất thông minh này lại kéo De Morgan vào những cuộc tranh cãi công khai không mấy vui vẻ. Nhà triết học người Scotland William Hamilton (1788-1856) - không nên nhầm với nhà toán học Ireland William Rowan Hamilton - đã lên án De Morgan là đạo văn, vì trước đó vài năm Hamilton đã công bố những ý tưởng phần nào có liên quan (nhưng thiếu chính xác hơn rất nhiều). Sự tấn công của Hamilton không đáng ngạc nhiên chút nào, căn cứ vào thái độ của ông nói chung đối với toán học và các nhà toán học. Ông đã từng nói: "Sự nghiên cứu quá mức về toán học sẽ làm hao tổn hoàn toàn năng lượng trí tuệ mà triết học và cuộc sống đòi hỏi". Sự náo loạn gây bởi những bức thư gay gắt hùa theo sự chỉ trích của Hamilton lại tạo ra một kết quả tích cực, hoàn toàn không định trước: nó đã dẫn dắt nhà đại số học George Boole đến với lôgic. Sau này Boole đã kể lại trong cuốn *Giải tích toán học của lôgic:*

> Mùa xuân năm nay, sự chú ý của tôi đã hướng vào vấn đề mà khi đó đã trở nên thôi thúc giữa Ngài W. Hamilton và giáo sư De Morgan; và tôi bị xui khiến bởi mối quan tâm mà vấn đề đó đã khơi gợi lên nhằm khôi phục lại cái đường dây của những đòi hỏi trước đây mà hầu như đã bị lãng quên. Dường như đối với tôi, mặc dù Lôgic có thể được xem như có liên quan đến ý tưởng về lượng, nhưng nó cũng còn có một hệ thống các quan hệ khác, sâu sắc hơn. Nếu là đúng luật khi xem nó từ *bên ngoài* như là sự kết nối chính nó thông qua trung gian là Số với những trực giác về Không gian và Thời gian, thì cũng sẽ là đúng luật khi xem nó từ *bên trong*, dựa trên những thực tế thuộc một trật tự khác nằm trong kết cấu của Trí tuệ.

Những từ ngữ khiêm tốn này mô tả sự bắt đầu của cái mà sau này trở thành một nỗ lực có ảnh hưởng sâu xa trong lôgic ký hiệu.

Các luật của tư duy

George Boole (H. 47) sinh ngày 2 tháng 11 năm 1815 tại thị trấn công nghiệp Lincoln, nước Anh. Cha ông, John Boole, là thợ đóng giày ở Lincoln, rất quan tâm đến toán học và cũng rất lành nghề trong việc chế tạo các dụng cụ quang học. Mẹ của Boole, Mary Ann Joyce, làm người hầu cho một bà lớn. Vì người cha không hoàn toàn chú tâm vào việc làm ăn chính của mình nên gia đình không được dư dả. George vào học một trường thương mại cho đến khi 7 tuổi, và sau đó học tại một trường tiểu học với một thày giáo tên là John Walter Reeves. Là con trai nên Boole chủ yếu quan tâm tới tiếng Latin, do một người bán sách dạy cho, và tự học tiếng Hy Lạp. Năm 14 tuổi, ông đã thử dịch một bài thơ của nhà thơ Hy Lạp Meleager thế kỷ thứ nhất trước CN. Người cha của George rất lấy làm tự hào và đã cho đăng bản dịch này trên tờ *Lincoln Herald* - một hành động chọc tức một bài báo bộc lộ sự mất niềm tin của hiệu trưởng trường địa phương. Sự nghèo túng của gia đình đã buộc George Boole phải bắt đầu làm trợ giảng ngay ở tuổi 16. Trong suốt những năm tiếp theo, ông đã dành thời gian rảnh rỗi của mình để học tiếng Pháp, tiếng Italia và tiếng Đức. Sự hiểu biết về những ngôn ngữ hiện đại này đã tỏ ra là rất hữu dụng, vì nó cho phép ông biết tới những công trình vĩ đại của các nhà toán học như Sylvestre Lacroix, Laplace, Lagrange, Jacobi và nhiều người khác. Tuy nhiên, thậm chí sau đó ông vẫn không thể



Hình 47

tham dự các lớp chính quy về toán học, nhưng ông tiếp tục tự học, trong khi đồng thời lại phải giúp đỡ cha mẹ và các em bằng nghề dạy học của mình. Mặc dù vậy, tài năng toán học của con người tự học này rồi cũng đã bộc lộ, ông bắt đầu cho công bố hàng loạt các bài báo trên *Tạp chí Toán học Cambridge*.

Năm 1842, Boole bắt đầu liên lạc thường xuyên với De Morgan, người mà ông đã gửi các bài báo về toán học để xin ý kiến. Vì tiếng tăm của ông bắt đầu nổi như là một nhà toán học độc đáo, và lại được hậu thuẫn bởi sự tiến cử mạnh mẽ của De Morgan, năm 1849, Boole được mời làm giáo sư toán học của trường Queen's College, ở Cork, Ireland. Và ông liên tục giảng dạy ở đó trong suốt phần đời còn lại của mình. Năm 1855, Boole cưới Mary Everest (cháu gái của chuyên gia lập bản đồ địa hình George Everest, mà sau này một ngọn núi mang tên ông), kém ông 17 tuổi và vợ chồng ông có 5 đứa con gái. Boole mất sớm ở tuổi 49. Vào một ngày mùa đông lạnh giá năm 1864, ông bị trúng mưa khi đang trên đường đến trường, nhưng ông vẫn cố đứng giảng bài trong bộ quần áo đã ướt sũng. Về nhà, có lẽ vợ ông đã làm cho tình hình trầm trọng hơn khi đổ xô nước lên giường theo sự mê tín lấy độc trị độc. Boole bị viêm phổi và mất ngày 8 tháng 12 năm 1864. Bertrand Russell không giấu được sự ngưỡng mộ của mình đối với con người tự học này: "Toán học thuần túy được khám phá bởi Boole, trong một tác phẩm mà ông đặt tên là *Các luật của tư duy* (1854)... Cuốn sách của ông thực tế là đề cập tới lôgic hình thức, và điều này chính là toán học." Đáng chú ý là lúc đó, cả Mary Boole (1832-1916) lẫn năm người con gái của Boole đều đạt được những thành công đáng kể trong các lĩnh vực từ giáo dục đến hóa học.

Boole cho xuất bản cuốn *Giải tích toán học về lôgic* vào năm 1847 và *Các luật của tư duy* năm 1854 (với tên đầy đủ là *Một khảo cứu về các luật của tư duy - cơ sở của các lý thuyết toán học về lôgic và xác suất*). Đây thực sự là những kiệt tác - cuốn sách đầu tiên đã đưa sự tương đồng giữa các phép tính lôgic và số học tiến một bước khổng lồ về phía trước. Boole đã thực sự biến lôgic thành một loại đại số (mà sau này được gọi là *đại số Boole*) và mở rộng sự phân tích lôgic thậm chí tới cả sự suy luận xác suất. Boole viết:

> Thiết kế của chuyên luận sau đây [Các luật của Tư duy] là nhằm khảo cứu những luật cơ bản của các thao tác của trí tuệ, những luật chi phối sự suy luận; nhằm biểu diễn những luật này bằng ngôn ngữ ký hiệu của giải tích, và trên cơ sở đó thiết lập một khoa học lôgic và phương pháp của nó; nhằm làm cho bản thân phương pháp đó trở thành

> cơ sở của một phương pháp chung áp dụng cho lý thuyết toán học về xác suất; và cuối cùng là nhằm tập hợp từ những yếu tố khác nhau của chân lý để xem xét các thông tin có thể có liên quan đến bản chất và kết cấu của trí tuệ con người dựa trên các quy luật, phương pháp nêu trên.

Các phép tính toán của Boole có thể được giải thích hoặc là áp dụng cho quan hệ giữa *các lớp* (tập hợp các đối tượng hay phần tử) hoặc là ở bên trong lôgic các *mệnh đề*. Chẳng hạn, nếu x và y là các lớp, thì mối quan hệ như $x = y$ có nghĩa là hai lớp này chính xác có các phần tử như nhau, ngay cả khi các lớp này được định nghĩa một cách khác nhau. Ví dụ, nếu mọi đứa trẻ trong một trường học nào đó đều thấp hơn 2m, thì hai lớp được định nghĩa là x = "mọi học sinh trong trường" và y = "mọi học sinh trong trường đều thấp hơn 2m" là như nhau. Nếu x và y biểu diễn các mệnh đề thì khi $x = y$ có nghĩa là hai mệnh đề này là tương đương nhau (nghĩa là một mệnh đề là đúng nếu và chỉ nếu mệnh đề kia cũng đúng). Chẳng hạn, hai mệnh đề x = "John Barrymore là anh trai của Ethel Barrymore" và y = "Ethel Barrymore là em gái của John Barrymore" là tương đương. Ký hiệu " $x. y$" biểu diễn phần chung giữa hai lớp x và y (tức là các phần tử thuộc cả x và y), hay còn gọi là *hội* của các mệnh đề x và y (cũng tức là "*x và y*"). Chẳng hạn, nếu x là lớp tất cả các thằng ngốc trong làng và y là tất cả những người trong làng có tóc đen, thì $x. y$ là lớp tất cả các thằng ngốc trong làng có tóc đen. Với các mệnh đề x và y, hội ($x. y$) (hay dùng từ "và") có nghĩa là cả hai mệnh đề đều phải đúng. Chẳng hạn, khi Hiệp hội xe môtô nói rằng "bạn phải đỗ bài thi lý thuyết và bài thi lái", thì điều này có nghĩa là bạn phải đáp ứng cả hai yêu cầu đó. Với Boole, hai lớp không có các phần tử chung, thì ký hiệu "$x + y$" biểu diễn lớp có cả các phần tử của x và các phần tử của y. Trong trường hợp các mệnh đề đó, "$x + y$" tương ứng với "hoặc x hoặc y chứ không cả hai". Chẳng hạn, nếu x là mệnh đề "cái chốt hình vuông" và y là "cái chốt hình tròn", thì $x + y$ là "cái chốt hoặc vuông hoặc tròn". Tương tự như vậy "$x - y$" biểu diễn lớp các phần tử của x mà không phải là phần tử của y, hay mệnh đề "x nhưng không phải y". Boole ký hiệu lớp phổ quát (chứa mọi phần tử khả dĩ đang xét) bằng 1 và lớp trống hay lớp không (tức là không chứa bất kỳ phần tử nào) bằng ø. Lưu ý rằng lớp (hay tập hợp) trống hoàn toàn không giống số 0 - số 0 chỉ đơn giản là số các phần tử trong lớp trống mà thôi. Cũng cần lưu ý rằng lớp trống không phải đồng nhất với không có gì, vì một lớp không có gì trong nó vẫn là một lớp. Chẳng hạn, nếu mọi tờ báo ở Albania đều viết bằng tiếng Albania thì lớp mọi tờ báo viết bằng tiếng Albania sẽ được ký hiệu bằng 1 theo hệ thống ký hiệu của Boole, trong khi lớp báo viết bằng tiếng Tây Ban Nha ở Albania sẽ được ký hiệu bằng 0. Đối với các mệnh đề, thì 1 biểu thị cho mệnh đề *đúng* (ví dụ như: loài người ai cũng chết) và 0 biểu thị cho mệnh đề *sai* (ví dụ như: loài người là bất tử). Với những quy ước đó, Boole đã có thể phát biểu một tập hợp các tiên đề xác định đại số lôgic. Chẳng hạn, bạn có thể kiểm tra bằng cách sử dụng các định nghĩa ở trên, mệnh đề hiển nhiên đúng "mọi thứ hoặc là x hoặc là không phải x" có thể được viết trong đại số Boole như sau: $x + (1 - x) = 1$, điều này cũng đúng trong đại số thông thường. Tương tự như vậy, phát biểu nói rằng phần chung giữa một lớp bất kỳ và lớp trống là một lớp trống được biểu thị bằng 0. $x = 0$, điều này cũng có nghĩa là hội của một mệnh đề bất kỳ với một mệnh đề sai cũng sẽ là sai. Chẳng hạn, mệnh đề hội "đường là ngọt và loài người là bất tử" tạo ra một mệnh đề sai mặc cho thực tế là phần đầu của nó là đúng. Cần lưu ý một lần nữa rằng, "đẳng thức" này trong đại số Boole cũng là đúng với các số đại số thông thường.

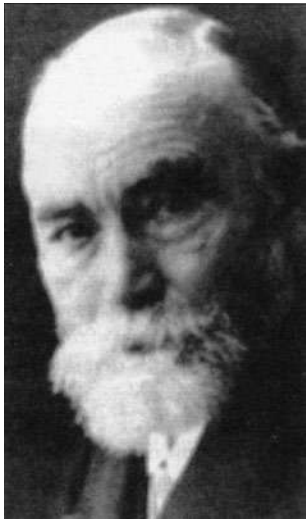
Để chứng tỏ sức mạnh các phương pháp của mình, Boole cố gắng sử dụng các ký hiệu lôgic cho mọi thứ mà ông cho là quan trọng. Chẳng hạn, ông thậm chí đã phân tích những lập luận của hai nhà triết học Samuel Clarke và Baruch Spinoza về sự tồn tại và những thuộc tính của Thượng đế. Tuy nhiên, kết luận của ông khá bi quan: "Tôi nghĩ là sẽ không thể có tiến bộ từ việc nghiên cứu kỹ những lập luận của Clarke và Spinoza mà không có một niềm tin sâu sắc về sự vô ích của tất cả những nỗ lực nhằm xác lập, một cách hoàn toàn *tiên nghiệm*, sự tồn tại của một đấng Thượng đế, những thuộc tính của Ngài và mối quan hệ của Ngài với vũ trụ." Mặc cho sự đúng đắn trong kết luận của Boole, nhưng rõ ràng là không phải mọi người đều bị thuyết phục về sự vô ích của những nỗ lực như vậy, vì các phiên bản cập nhật của những lập luận mang tính bản thể luận về sự tồn tại của Chúa vẫn tiếp tục sinh sôi cho đến ngày nay.

Nhìn chung, Boole cố gắng để chinh phục bằng toán học những liên từ lôgic như *and (và), or (hoặc), if (nếu)... then (thì),* và *not (không)*, mà hiện nay vẫn là trung tâm của những thao tác trong máy tính và các chuyển mạch khác nhau. Do đó, ông đã được nhiều người xem là một trong những "nhà tiên tri" của thời đại số hóa. Dù vậy, do bản chất tiên phong của nó, đại số Boole vẫn chưa hoàn thiện. Trước hết, Boole đã làm cho các công trình của mình có phần rối rắm và khó lĩnh hội do sử dụng một hệ thống ký hiệu quá giống với các ký hiệu trong đại số thông thường. Thứ hai, Boole đã làm mờ nhòe sự khác biệt giữa các mệnh đề (ví dụ như "Aristotle không bất tử"), các hàm mệnh đề hay các vị từ (ví dụ "*x* không bất tử"), và các mệnh đề được lượng từ hóa (ví dụ như "với mọi *x*, *x* không bất tử"). Cuối cùng, Frege và Russell sau này cho rằng đại số học bắt nguồn từ lôgic. Do đó, người ta có thể biện luận rằng sẽ là có nghĩa hơn nếu như xây dựng đại số học dựa trên lôgic chứ không phải theo con đường nào khác.

Tuy nhiên, có một khía cạnh khác trong công trình của Boole sẽ trở nên rất thành công. Đó là sự nhận thức, về mối quan hệ chặt chẽ như thế nào giữa lôgic và khái niệm các *lớp* hay các *tập hợp*. Hãy nhớ lại là đại số Boole áp dụng tốt như nhau cho các lớp và các mệnh đề. Thực vậy, khi mọi phần tử của một tập hợp *X* cũng là các phần tử của tập hợp *Y* (tức *X* là một *tập con* của *Y*), thì thực tế này có thể được biểu diễn như một *phép kéo theo lôgic* có dạng "nếu *X* thì *Y*". Chẳng hạn, thực tế là tập hợp các con ngựa là tập con của tập hợp mọi động vật bốn chân có thể được viết dưới dạng một mệnh đề lôgic "Nếu *X* là ngựa thì nó là động vật bốn chân".

Đại số Boole của lôgic sau đó đã được mở rộng và hoàn thiện bởi nhiều nhà nghiên cứu, nhưng người có công khai thác một cách đầy đủ sự tương tự giữa các tập hợp và lôgic, và đã đưa toàn bộ khái niệm này tới một cấp độ hoàn toàn mới, đó là Gottlob Frege (H. 48).

Friedrich Ludwig Gottlob Frege sinh ra tại Wismar, nước Đức, nơi mà cả cha và mẹ ông đã từng là hiệu trưởng của một trường nữ trung học, vào những thời gian khác nhau. Ông theo học toán học, vật lý, hóa học và triết học, ban đầu tại Đại học Jena và sau



Hình 48

đó học thêm hai năm ở Đại học Gôttingen. Sau khi tốt nghiệp, ông bắt đầu giảng dạy ở Jena vào năm 1874 và liên tục dạy toán ở trường này trong suốt sự nghiệp của mình. Mặc dù khối lượng giảng dạy rất lớn, nhưng Frege vẫn cố gắng cho xuất bản tác phẩm có tính cách mạng đầu tiên của mình về lôgic vào năm 1879. Tác phẩm có nhan đề *Chữ viết-khái niệm, một ngôn ngữ hình thức của tư duy thuần túy phỏng theo ngôn ngữ của số học* (thường được biết đến với cái tên *Begriffsschrift*). Trong tác phẩm này, Frege đã phát triển một ngôn ngữ lôgic, độc đáo, mà sau này ông đã mở rộng trong cuốn sách hai tập *Grundgesetze der Arithmetic (Các quy luật cơ bản của số học)*. Dự tính của Frege trong lôgic học một mặt rất tập trung nhưng mặt khác cũng đầy tham vọng. Trong khi ông chủ yếu tập trung vào số học, nhưng ông cũng muốn chứng tỏ rằng ngay cả những khái niệm quen thuộc như các số tự nhiên 1, 2, 3,..., cũng có thể được quy về các cấu trúc lôgic. Do đó, Frege tin rằng người ta có thể chứng minh được tất cả các chân lý của số học chỉ xuất phát từ một số ít tiên đề trong lôgic. Nói cách khác, theo Frege, ngay cả những mệnh đề như 1 + 1 = 2 cũng không phải là các *chân lý kinh nghiệm*, dựa trên sự quan sát, mà thay vì, chúng có thể được rút ra từ một tập hợp các tiên đề lôgic. Cuốn *Begriffsschrift* của Frege có tầm ảnh hưởng lớn đến mức nhà lôgic cùng thời ông là Willard Van Orman Quine (1908-2000) đã từng viết: “Lôgic là một chủ đề cũ, nhưng kể từ năm 1879, nó đã là một chủ đề lớn”.

Cốt lõi triết học Frege là sự khẳng định rằng chân lý là độc lập với sự phán xét của con người. Trong cuốn *Các luật cơ bản của số học*, ông viết: “Là đúng thì khác với được coi là đúng, bất kể là bởi một người, nhiều người hay tất cả mọi người, và trong bất cứ hoàn cảnh nào cũng không được quy về nó. Không hề có sự mâu thuẫn nào trong một điều gì đó là đúng nhưng lại bị mọi người coi là sai. Tôi hiểu “các luật lôgic” không phải bằng các quy luật tâm lý coi-là-đúng, mà là các luật của chân lý... chúng [các luật của chân lý] là những cột mốc ranh giới được đặt trong một nền tảng vĩnh cửu, mà tư duy của chúng ta có thể tràn qua nhưng không bao giờ làm dịch chuyển được.”

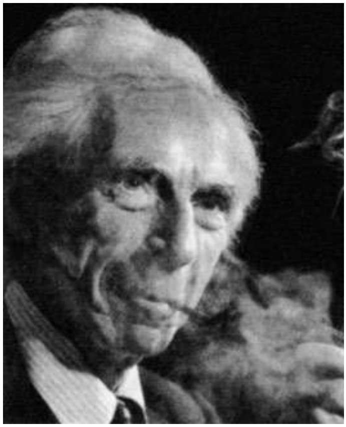
Các tiên đề lôgic của Frege nhìn chung có dạng “với mọi... nếu... thì...”. Chẳng hạn, một trong những tiên đề phát biểu: “với mọi *p*, nếu không- (không-*p*) thì *p*”. Tiên đề này về cơ bản phát biểu rằng nếu một mệnh đề mâu thuẫn với một mệnh đề đang xét là sai, thì mệnh đề đang xét là đúng. Ví dụ, nếu bạn không dừng xe trước biển báo dừng là sai, thì bạn nhất thiết phải dừng xe trước biển báo dừng. Để thực sự phát triển một “ngôn ngữ” lôgic, Frege đã bổ sung vào tập hợp các tiên đề một đặc tính quan trọng mới. Ông đã thay thế phong cách chủ/vị truyền thống của lôgic cổ điển bằng những khái niệm vay mượn từ lý thuyết hàm của toán học. Tôi sẽ giải thích điều này một cách ngắn gọn. Khi viết các biểu thức toán học như: $f(x) = 3x + 1$, điều này có nghĩa là f là một hàm số với biến số là x và giá trị của hàm số có thể thu được bằng cách nhân giá trị của biến với 3 và sau đó cộng thêm 1. Frege đã định nghĩa cái mà ông gọi là *khái niệm* là hàm số. Chẳng hạn, giả sử bạn đang xét khái niệm "ăn thịt". Khái niệm này có thể được ký hiệu bằng một hàm "$F(x)$", và giá trị của hàm này sẽ là "đúng" nếu x = sư tử, và "sai" nếu x = hươu. Tương tự như vậy, đối với các số, khái niệm (hàm số) "nhỏ hơn 7" sẽ ánh xạ mọi số bằng hoặc lớn hơn 7 với "sai" và mọi số nhỏ hơn 7 với "đúng". Frege đã đề cập tới các đối tượng mà đối với nó một khái niệm nhất định sẽ cho giá trị "đúng" khi nó được "liệt vào" khái niệm đó.

Như tôi đã lưu ý ở trên, Frege tin chắc rằng mọi mệnh đề liên quan đến các số tự nhiên đều có thể biết được và rút ra được chỉ từ các định nghĩa và các luật lôgic. Do vậy, ông đã khởi đầu sự trình bày của mình về chủ đề số tự nhiên mà không đòi hỏi phải biết trước khái niệm "số". Chẳng hạn, trong ngôn ngữ lôgic của Frege, hai khái niệm được xem là *equinumerous* (tức là, có cùng con số gắn với chúng) nếu có một tương ứng 1-1 giữa các đối tượng được "liệt vào" một khái niệm và các đối tượng được "liệt vào" một khái niệm khác. Chẳng hạn, các nắp thùng rác thì *equinumerous* với các thùng rác (nếu như mỗi thùng rác đều có nắp), và định nghĩa này không đòi hỏi phải nhắc đến bất kỳ số nào. Sau đó, Frege đã đưa ra một định nghĩa lôgic tài tình về số 0. Hãy hình dung một khái niệm *F* được định nghĩa là “không đồng nhất với chính nó”. Vì mọi đối tượng đều phải đồng nhất với chính mình, nên không có đối tượng nào được liệt vào *F*. Nói cách khác, với mọi đối tượng x, $F(x)$ = sai. Frege đã định nghĩa số zero quen thuộc như là “số của khái niệm *F*”. Sau đó, ông tiếp tục định nghĩa tất cả các số tự nhiên thông qua các thực thể mà ông gọi là *các mở rộng*. Mở rộng một khái niệm là lớp của tất cả các đối tượng được liệt vào khái niệm đó. Mặc dù định nghĩa này có thể không phải là dễ dàng tiêu hóa đối với những người ngoại đạo, nhưng nó thực sự là đơn giản. Chẳng hạn, mở rộng của khái niệm “phụ nữ”, là lớp của tất cả phụ nữ. Lưu ý rằng mở rộng của “phụ nữ” bản thân nó không phải là một phụ nữ.

Bạn có thể thắc mắc định nghĩa lôgic trừu tượng này làm thế nào giúp ta định nghĩa được, giả sử như, số 4. Theo Frege, số 4 là mở rộng (hay lớp) của tất cả các khái niệm có bốn đối tượng được liệt vào chúng. Ví dụ, khái niệm “là một chân của một con chó cụ thể có tên là Snoopy” là thuộc về lớp này (và vì vậy thuộc về số 4), cũng như khái niệm “là ông, bà của Gottlob Frege”.

Chương trình của Frege là cực kỳ ấn tượng, song nó cũng vấp phải một số trở ngại nghiêm trọng. Một mặt, ý tưởng về việc sử dụng các khái niệm - nguồn sống của tư duy - để xây dựng số học, là một ý tưởng thực sự thiên tài. Nhưng mặt khác, Frege lại không phát hiện được một số điểm không nhất quán quan trọng trong hình thức luận của ông. Đặc biệt là một trong số các tiên đề của ông, được gọi là *Luật cơ bản V*, đã được chứng minh là sẽ dẫn tới mâu thuẫn và vì vậy mà nó là một sơ hở chí tử.

Bản thân luật này phát biểu khá ngây thơ rằng mở rộng của một khái niệm *F* là đồng nhất với mở rộng của khái niệm *G* khi và chỉ



Hình 49

khi *F* và *G* có cùng các đối tượng được liệt vào chúng. Nhưng một quả bom đã được thả xuống vào ngày 16 tháng 6 năm 1902, khi Bertrand Russell (H. 49) viết một lá thư gửi cho Frege, trong đó chỉ ra một nghịch lý chứng tỏ Luật cơ bản V là không nhất quán. Cứ như thể đã được số phận sắp đặt, bức thư của Russell đã đến ngay khi tập 2 cuốn *Các luật cơ bản của số học* của Frege sắp sửa được in. Frege choáng váng vội vàng bổ sung thêm vào bản thảo một sự thừa nhận chân thành: "Một nhà khoa học khó có thể gặp điều gì khó chịu hơn là có những cơ sở để phải chịu là sai ngay khi công trình của mình vừa mới hoàn thành. Tôi bị đặt vào tình thế này bởi lá thư từ ông Bertrand Russell khi cuốn sách này đã sắp ấn hành". Với bản thân Russell, ông đã viết những lời hòa nhã: "Sự phát hiện ra mâu thuẫn của ông đã khiến tôi vô cùng kinh ngạc và, tôi phải nói là, sửng sốt, bởi nó làm lung lay nền tảng mà tôi định dựa vào đó để xây dựng số học".

Thực tế mà một nghịch lý có thể có hiệu ứng tàn phá như vậy đến toàn bộ một chương trình nhằm tạo nên nền tảng của toán học, thoạt nghe có thể khá ngạc nhiên, nhưng như nhà lôgic thuộc Đại học Harvard W. V. O. Quine đã từng nói: “Hơn một lần trong lịch sử việc phát hiện ra nghịch lý đã là cơ hội để tái thiết phần lớn nền tảng của tư duy”. Nghịch lý Russell đã mang đến chính xác một cơ hội như vậy.

Nghịch lý Russell

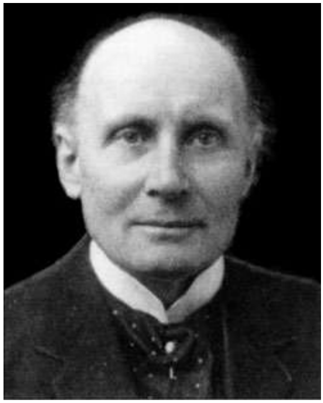
Người mà về cơ bản một tay dựng nên lý thuyết về tập hợp là nhà toán học người Đức Georg Cantor. Tập hợp, hay lớp, nhanh chóng tỏ ra là cơ bản và gắn bó chặt chẽ với lôgic đến mức bất kỳ một nỗ lực nào nhằm xây dựng toán học dựa trên nền tảng lôgic cũng tất yếu hàm ý rằng người ta xây dựng nó trên nền tảng tiên đề của lý thuyết tập hợp.

Một lớp hay một tập hợp đơn giản là một bộ các đối tượng. Các đối tượng ở đây không cần phải có liên quan với nhau theo bất cứ cách nào. Bạn có thể nói về một lớp có chứa tất cả các khoản mục sau: phim truyền hình phát sóng năm 2003, ngựa trắng của Napoleon, và khái niệm về tình yêu đích thực. Các đối tượng thuộc một lớp nhất định được gọi là *các phần tử* của nó.

Hầu hết các lớp đối tượng mà bạn thường gặp đều không phải là phần tử của chính chúng. Chẳng hạn, lớp của mọi bông tuyết bản thân nó không phải là tuyết; lớp của mọi đồng hồ cổ không phải là một đồng hồ cổ, và v.v. Nhưng một số lớp lại thực sự là phần tử của chính chúng. Ví dụ, lớp “mọi thứ không phải là đồng hồ cổ" là một phần tử của chính nó, vì lớp này hoàn toàn không phải là cái đồng hồ cổ. Tương tự như vậy, lớp của mọi lớp cũng là phần tử của chính nó vì rõ ràng nó là một lớp. Nhưng thế còn lớp của "tất cả các lớp mà không phải là phần tử của chính chúng" thì sao? Hãy gọi đó là lớp *R*. Liệu *R* có phải là phần tử của chính nó (tức là của *R*) hay không? Rõ ràng là *R* không thể thuộc *R*, vì nếu đúng như thế thì nó sẽ trái với định nghĩa về phần tử của *R*. Nhưng nếu *R* không thuộc về chính nó thì theo định nghĩa, nó phải là phần tử của *R*. Tương tự như tình huống của người thợ cạo, vì vậy chúng ta thấy rằng lớp *R* vừa thuộc vừa không thuộc *R*, nghĩa là một mâu thuẫn lôgic. Đây chính là nghịch lý mà Russell đã gửi cho Frege. Vì nghịch lý này đã hủy hoại toàn bộ quá trình mà nhờ nó các lớp hay tập hợp được xác định, nên cú đánh này đối với chương trình của Frege là thực sự chí tử. Mặc dù Frege đã có một số nỗ lực trong tuyệt vọng để cứu chữa hệ thống tiên đề của mình, song ông đã không thành công. Kết luận có vẻ như thật thảm khốc - thay vì vững chắc hơn toán học, lôgic hình thức dường như dễ bị tổn thương hơn do sự không nhất quán làm cho tê liệt.

Gần như đồng thời với việc Frege đang phát triển chương trình lôgic học của mình, nhà toán học và lôgic người Italia là Giuseppe Peano cũng đã thử một cách tiếp cận khác. Peano muốn đặt số học trên cơ sở tiên đề. Do đó, điểm xuất phát của ông là phát biểu một tập hợp các tiên đề cô đọng và đơn giản. Chẳng hạn, ba tiên đề đầu tiên của ông như sau:

1. Zero là một số
2. Kế tiếp một số bất kỳ cũng là một số.
3. Không có hai số có cùng một số kế tiếp.

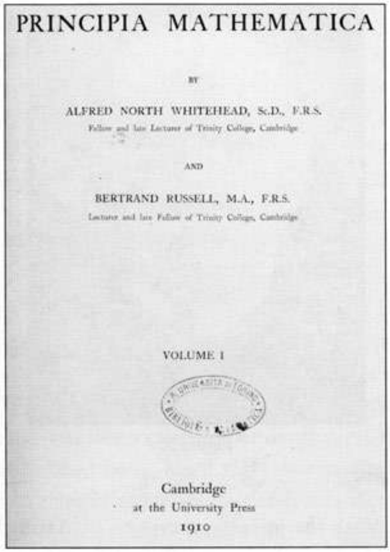


Hình 50

Vấn đề là trong khi hệ tiên đề của Peano thực sự tái tạo được các luật đã biết của số học (khi đã đưa vào một số định nghĩa bổ sung), thì lại không có gì xác định được các số tự nhiên một cách duy nhất.

Bước tiếp theo đã được thực hiện bởi Bertrand Russell. Ông vẫn cho rằng ý tưởng ban đầu của Frege - ý tưởng rút ra số học từ lôgic - vẫn là con đường đúng đắn. Đáp ứng nhiệm vụ cao cả này, Russell đã tạo ra, cùng với Alfred North Whitehead (H. 50), một kiệt tác lôgic phi thường - một cuốn sách có tính cột mốc gồm ba tập nhan đề *Principia Mathematica.* Ngoại trừ cuốn *Organon* của Aristotle ra, thì đây có lẽ là tác phẩm có tầm ảnh hưởng lớn nhất trong lịch sử lôgic học (H.51 là trang bìa của lần xuất bản đầu tiên).

Trong *Principia*, Russell và Whitehead đã bảo vệ quan điểm cho rằng toán học, về cơ bản, là sự tạo dựng các luật lôgic, và giữa chúng không có một ranh giới rạch ròi. Tuy nhiên, để đạt được sự mô tả nhất quán, thì bằng cách nào đó chúng phải kiểm soát được các nghịch lý (ngoài nghịch lý của Russell ra, nhiều nghịch lý khác


PRINCIPIA MATHEMATICA

BY

ALFRED NORTH WHITEHEAD, Sc.D., F.R.S.

Fellow and late Lecturer of Trinity College, Cambridge

AND

BERTRAND RUSSELL, M.A., F.R.S.

Lecturer and late Fellow of Trinity College, Cambridge

VOLUME I

Cambridge
at the University Press
1910

Hình 51

cũng đã được khám phá). Điều này đòi hỏi phải có những thủ pháp lôgic khéo léo và thiện nghệ. Russell biện luận rằng các nghịch lý đó sở dĩ nảy sinh chỉ bởi vì cái "vòng luẩn quẩn" trong đó người ta định nghĩa các thực thể thông qua một lớp các đối tượng mà trong chính nó đã chứa một thực thể xác định. Theo lời của Russell thì: "Nếu tôi nói 'Napoleon có đủ mọi phẩm chất làm nên một vị tướng vĩ đại', thì tôi phải định nghĩa 'các phẩm chất' theo cách sao cho nó phải không bao hàm điều mà tôi đang nói, tức là 'việc có đủ mọi phẩm chất làm nên một vị tướng vĩ đại' bản thân nó phải không được là một phẩm chất theo nghĩa đã giả thiết".

Để tránh nghịch lý, Russell đã đề xuất một *lý thuyết các kiểu hình*, trong đó một lớp (hay tập hợp) thuộc về một kiểu hình lôgic cao hơn cái kiểu hình của các phần tử của nó. Chẳng hạn, từng cầu thủ trong đội bóng Dallas Cowboy sẽ là kiểu hình 0. Bản thân đội bóng Dallas Cowboy, là một lớp các cầu thủ, sẽ là kiểu hình 1. Giải bóng đá quốc gia, là một lớp các đội bóng, sẽ là kiểu hình 2; tập hợp các giải đấu (nếu có) sẽ là kiểu hình 3, và cứ tiếp tục như vậy. Trong sơ đồ này, khái niệm "một lớp là phần tử của chính nó" là không sai cũng không đúng, mà đơn giản chỉ là vô nghĩa. Kết quả là, nghịch lý kiểu như nghịch lý Russell sẽ không bao giờ xuất hiện.

Tất nhiên *Principia* là một sự thành công to lớn trong lôgic học, song khó có thể xem nó như là một nền tảng mà người ta đã tìm kiếm bấy lâu nay cho toán học. Lý thuyết các kiểu hình của Russell được nhiều người xem như là một phương thuốc nhân tạo cho vấn đề các nghịch lý - phương thuốc mà ngoài ra còn tạo nên những phân nhánh một cách phức tạp rắc rối. Chẳng hạn, số hữu tỷ (cũng tức là các phân số tối giản) hóa ra lại là kiểu hình cao hơn các số tự nhiên. Để tránh một số các biến chứng đó, Russell và Whitehead đã đưa ra một tiên đề bổ sung, được gọi là tiên đề khả quy, nhưng mà bản thân nó cũng lại tạo ra những tranh cãi và sự hồ nghi nghiêm trọng.

Những cách thức tao nhã hơn để loại bỏ các nghịch lý cuối cùng đã được đề xuất bởi nhà toán học Ernst Zermelo và Abraham Fraenkel. Trong thực tế, họ đã cố gắng tiên đề hóa một cách nhất quán lý thuyết tập hợp và tái tạo hầu như toàn bộ các kết quả của lý thuyết tập hợp. Điều này nhìn bề ngoài dường như ít nhất đã thỏa mãn được phần nào giấc mơ của những người Platonic. Nếu lý thuyết tập hợp và lôgic học là hai mặt đúng của cùng một đồng xu thì một nền tảng vững chắc của lý thuyết tập hợp sẽ kéo theo một nền tảng vững chắc của lôgic học. Thêm vào đó, nếu phần lớn toán học thực tế được suy ra từ lôgic, thì điều này mang lại cho toán học một sự chắc chắn khách quan nhất định, và nó có lẽ cần được khai thác để giải thích tính hiệu quả của toán học. Không may là, các nhà Platonic đã không thể ăn mừng được lâu, vì họ sắp sửa vấp phải một trường hợp tồi tệ đã được đoán trước.

Cuộc khủng hoảng phi Euclid một lần nữa?

Năm 1908, nhà toán học người Đức Ernst Zermelo (1871-1953) đã đi theo một con đường rất tương tự với con đường mà Euclid đã lần đầu tiên vạch ra vào khoảng năm 300 trước CN. Euclid đã đưa ra một số tiên đề không chứng minh nhưng được cho là hiển nhiên về các điểm và đường thẳng rồi sau đó dựng nên môn hình học dựa trên các tiên đề đó. Zermelo - người đã khám phá ra nghịch lý Russell một cách độc lập vào khoảng đầu năm 1900 - đã đề xuất một cách thức xây dựng lý thuyết tập hợp dựa trên một nền tảng tiên đề tương ứng. Nghịch lý Russell được bỏ qua trong lý thuyết này bằng cách lựa chọn một cách thận trọng các nguyên lý xây dựng nhằm loại bỏ những ý tưởng mâu thuẫn kiểu như “tập hợp của mọi tập hợp”. Sơ đồ của Zermelo còn được phát triển xa hơn vào năm 1922 bởi nhà toán học Israel Abraham Fraenkel (1891-1965) để tạo nên cái mà sau này trở thành lý thuyết tập hợp Zermelo-Fraenkel (những thay đổi quan trọng khác sau này được John von Neumann bổ sung vào năm 1925). Mọi thứ gần như đã hoàn hảo (nhưng sự nhất quán phi mẫu thuẫn vẫn còn cần được chứng minh) không còn phải chịu những nghi ngờ lằng nhằng nào nữa. Có một tiên đề - gọi là *tiên đề lựa chọn* - cũng giống như tiên đề 5 nổi tiếng của Euclid khiến các nhà toán học điên đầu. *Nói* đơn giản thì tiên đề lựa chọn phát biểu rằng: Nếu *X* là một tập hợp của những tập hợp không rỗng, thì chúng ta có thể lựa chọn được một phần tử đơn lẻ từ mỗi tập hợp trong số tất cả mọi tập hợp trong *X* để tạo nên một tập hợp mới *Y*. Bạn có thể dễ dàng kiểm tra phát biểu này là đúng nếu tập hợp *X* là không vô hạn. Ví dụ, nếu chúng ta có 100 cái hộp, mỗi hộp chứa ít nhất một viên bi, chúng ta có thể dễ dàng chọn một viên bi từ mỗi hộp để tạo nên một tập hợp mới *Y* có chứa 100 viên bi. Trong trường hợp như vậy, chúng ta không cần một tiên đề đặc biệt; chúng ta thực sự có thể chứng minh được rằng một sự lựa chọn là khả dĩ. Phát biểu này còn đúng ngay cả với các tập hợp *X* vô hạn, chừng nào chúng ta có thể chỉ ra một cách chính xác sự lựa chọn được tiến hành như thế nào. Chẳng hạn, hãy hình dung một tập hợp vô hạn các tập không rỗng của các số tự nhiên. Các phần tử của tập hợp này có thể là các tập như {2, 6, 7}, {1,0}, {346, 5, 11, 1257}, {tất cả các số tự nhiên giữa 381 và 10.457}, và cứ tiếp tục như vậy. Trong mọi tập hợp của các số tự nhiên, luôn có một phần tử là nhỏ nhất. Vì vậy, sự lựa chọn của chúng ta có thể được mô tả một cách duy nhất theo cách sau: “Từ mỗi tập hợp, ta chọn ra phần tử nhỏ nhất”. Trong trường hợp này, một lần nữa ta lại có thể tránh được nhu cầu cần có một tiên đề lựa chọn. Vấn đề nổi lên là đối với các tập hợp vô hạn trong đó chúng ta không thể xác định được cách lựa chọn. Trong hoàn cảnh như vậy, quá trình lựa chọn không bao giờ là kết thúc và sự tồn tại của một tập hợp bao gồm một cách chính xác một phần từ lấy từ mỗi phần tử của tập *X* trở thành một vấn đề của lòng tin.

Ngay từ khởi đầu, tiên đề lựa chọn đã tạo nên sự tranh cãi gay gắt giữa các nhà toán học. Thực tế mà tiên đề khẳng định về sự tồn tại của những đối tượng toán học nhất định (ví dụ các lựa chọn), mà không thực sự cung cấp một ví dụ cụ thể nào về nó, đã làm bùng lên ngọn lửa, đặc biệt là từ những người ủng hộ cho trường phái tư duy được gọi là *cấu trúc luận* (có liên quan mật thiết về mặt triết học với *trực giác luận*). Những người theo cấu trúc luận cho rằng bất kỳ điều gì tồn tại cũng đều có thể được xây dựng một cách tường minh. Các nhà toán học khác cũng có xu hướng tránh tiên đề lựa chọn và chỉ sử dụng các tiên đề khác trong lý thuyết tập hợp của Zermelo-Fraenkel.

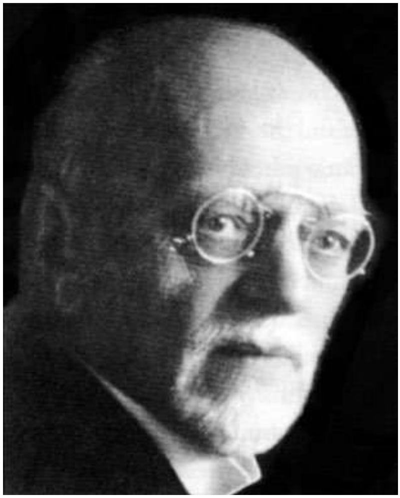
Vì những mặt hạn chế có thể cảm nhận được của tiên đề lựa chọn, các nhà toán học bắt đầu tự hỏi liệu có thể chứng minh được tiên đề này nhờ sử dụng các tiên đề khác hay không. Lịch sử của tiên đề 5 Euclid đúng là đã được lặp lại. Câu trả lời một phần, cuối cùng, cũng đã được đưa ra vào cuối những năm 1930. Kurt Gôdel (1906-78), một trong những nhà lôgic có ảnh hưởng nhất của mọi thời đại, đã chứng minh được rằng tiên đề lựa chọn và phỏng đoán nổi tiếng khác của nhà sáng lập lý thuyết tập hợp, Georg Cantor, được gọi là *giả thuyết continuum*, đều nhất quán với các tiên đề Zermelo-Fraenkel khác. Tức là, cả hai giả thuyết đó đều không bị các tiên đề khác của lý thuyết tập hợp bác bỏ. Các chứng minh bổ sung vào năm 1963 bởi nhà toán học Mỹ Paul Cohen (1934-2007, thật đáng buồn là ông đã qua đời vào thời gian tôi đang viết cuốn sách này) đã thiết lập một sự độc lập hoàn toàn của tiên đề lựa chọn và giả thuyết continuum. Nói cách khác, tiên đề lựa chọn không thể chứng minh cũng không thể bác bỏ bởi các tiên đề khác của lý thuyết tập hợp. Tương tự như vậy, giả thuyết continuum cũng không được chứng minh hay bác bỏ bởi cùng các tiên đề đó, thậm chí kể cả khi gộp cả tiên đề lựa chọn vào.

Sự phát triển này đã có những hệ quả triết học sâu sắc. Cũng như trường hợp hình học phi Euclid ở thế kỷ 19, không chỉ có một lý thuyết tập hợp hoàn chỉnh cuối cùng, mà ít nhất có tới bốn! Người ta có thể đưa ra những giả thiết khác nhau về các tập hợp vô hạn và kết cục thu được các lý thuyết tập hợp loại trừ nhau. Chẳng hạn, người ta có thể giả thiết rằng cả tiên đề lựa chọn và giả thuyết continuum đều đúng và sẽ nhận được một phiên bản, hoặc giả thiết cả hai đều không đúng và sẽ nhận được một lý thuyết hoàn toàn khác. Tương tự, khi giả thiết một trong hai tiên đề là đúng và phủ định cái còn lại sẽ dẫn đến hai lý thuyết tập hợp khác nữa.

Đây chính là sự lặp lại cuộc khủng hoảng phi Euclid, chỉ có điều tồi tệ hơn. Vai trò cơ bản của lý thuyết tập hợp như là một cơ sở tiềm tàng của toàn bộ toán học đã làm cho vấn đề này đối với các nhà Platonic trở nên gay gắt hơn nhiều. Nếu như người ta thực sự có thể phát biểu nhiều lý thuyết tập hợp chỉ đơn giản bằng việc lựa chọn một tập hợp tiên đề khác, thì phải chăng sự biện hộ này cho toán học chẳng là gì khác hơn sự phát minh của con người? Chiến thắng của những người theo chủ nghĩa hình thức có vẻ như đã được đảm bảo chắc chắn.

Một chân lý bất toàn

Trong khi Frege quan tâm rất nhiều đến ý nghĩa của các tiên đề thì người đề xướng chính của chủ nghĩa hình thức, nhà toán học vĩ



Hình 52

đại người Đức David Hilbert (H. 52), lại ủng hộ cho việc né tránh hoàn toàn bất kỳ giải thích nào về các công thức toán học. Hilbert không quan tâm đến những vấn đề đại loại như toán học có được rút ra từ các khái niệm lôgic hay không. Thay vì thế, với ông, toán học đơn giản chỉ là một tập hợp những công thức vô nghĩa - những hình mẫu có cấu trúc tạo bởi các ký hiệu tùy ý. Còn công việc bảo đảm cho những nền tảng của toán học được Hilbert gán cho một nguyên lý mới, mà người ta thường xem như là "siêu toán học". Tức là, siêu toán học liên quan đến việc sử dụng chính các phương pháp của giải tích toán học để chứng minh rằng toàn bộ quá trình rút ra các định lý từ hệ tiên đề, do hệ hình thức đòi hỏi, bằng cách tuân theo những quy tắc suy luận chặt chẽ, là phi mâu thuẫn. Nói một cách khác, Hilbert cho rằng ông có thể chứng minh một cách toán học rằng toán học vận hành tốt. Ông viết:

> Những nghiên cứu của tôi về đặt nền tảng mới của toán học có mục tiêu không gì khác hơn là điều này: để loại bỏ, một lần cho mãi mãi, những nghi vấn chung về độ tin cậy của suy luận toán học... Mọi thứ mà trước đây tạo nên toán học cần được hình thức hóa một cách chặt chẽ, sao cho toán học đích thực hay toán học đúng nghĩa trở thành một kho các công thức... Ngoài toán học đích thực được hình thức hóa này, chúng ta còn có một toán học ở phạm vi mới: một siêu toán học cần thiết để bảo vệ cho toán học, và trong đó, trái ngược với kiểu suy luận hình thức thuần túy trong toán học đích thực - người ta áp dụng suy luận theo ngữ cảnh, nhưng chỉ để chứng minh sự nhất quán của các tiên đề... Vì vậy, sự phát triển của khoa học toán học như một tổng thể đã diễn ra theo hai cách thường xuyên thay thế nhau: một mặt chúng ta rút ra những công thức có thể chứng minh từ các tiên đề bằng suy luận hình thức; mặt khác, chúng ta đưa thêm vào những tiên đề mới và chứng minh sự nhất quán của chúng bằng suy luận ngữ cảnh.

Chương trình của Hilbert đã hy sinh ý nghĩa để bảo đảm an toàn cho các nền tảng. Do đó, đối với những người đi theo chủ nghĩa hình thức của ông, toán học thực sự chỉ là một trò chơi, nhưng mục đích của họ là để chứng minh một cách chặt chẽ nó là một trò chơi nhất quán hoàn toàn. Với tất cả sự phát triển trong quá trình tiên đề hóa, sự nhận thức về giấc mơ "lý thuyết-chứng minh" theo hình thức luận này dường như mới chỉ lấp ló đâu đó.

Tuy nhiên, không phải ai cũng bị thuyết phục rằng con đường mà

Hilbert lựa chọn là đúng đắn. Ludwig Wittgenstein (1889-1951), được một số người xem như là nhà triết học vĩ đại nhất thế kỷ 20, coi nỗ lực của Hilbert về siêu toán học chỉ như một sự lãng phí thời gian. "Chúng ta không thể bỏ quy tắc này vì ứng dụng một quy tắc khác", ông biện luận. Nói cách khác, Wittingenstein không tin rằng sự hiểu biết về một "trò chơi" lại có thể dựa trên sự xây dựng của một trò chơi khác: "Nếu như tôi không rõ bản chất của toán học, thì không có chứng minh nào có thể giúp được tôi". Dù vậy, không ai mong là sắp có sét đánh. Chỉ bằng một đòn, chàng trai Kurt Gôdel 24 tuổi đã đóng một cái cọc ngay chính giữa trái tim của chủ nghĩa hình thức.

Kurt Gôdel (H. 53) sinh ngày 28 tháng 4 năm 1906, tại thành phố Moravian mà sau này được biết tới với cái tên tiếng Séc là Brno. Vào thời đó, thành phố vẫn còn thuộc đế chế Áo-Hung, và Gôdel lớn lên trong một gia đình nói tiếng Đức. Cha ông,

Hình 53

Rudolf Gôdel, quản lý một nhà máy dệt và mẹ ông, bà Mariane Gôdel, chăm lo để cậu Kurt có được một sự giáo dục rộng về toán, lịch sử, ngôn ngữ và tôn giáo. Trong suốt những năm tuổi *teen*, Gôdel đã bộc lộ sự quan tâm đặc biệt đối với toán học và triết học và ở tuổi 18, ông vào học tại Đại học Vienna, và ở đây sự chú ý của ông lại chuyển hướng hẳn sang lôgic toán. Ông đặc biệt hứng thú với cuốn *Principia Mathematica* của Russell và Whitehead cũng như chương trình của Hilbert, và đã lựa chọn đề tài luận án của mình là vấn đề về *tính đầy đủ*. Mục tiêu của nghiên cứu này, về cơ bản, là nhằm xác định liệu cách tiếp cận hình thức do Hilbert chủ trương đã đủ để tạo ra mọi phát biểu đúng đắn của toán học hay không. Gôdel đã nhận học vị tiến sỹ vào năm 1930 và một năm sau, ông đã cho công bố *các định lý về tính không đầy đủ* (hay còn gọi ngắn gọn là *các định lý về tính bất toàn*) của mình, và đã tạo ra một đợt sóng gây choáng váng truyền đi khắp thế giới toán học và triết học.

Theo ngôn ngữ của toán học thuần túy, thì hai định lý này nghe có vẻ khá kỹ thuật và không có gì gây gây sốc lắm:

1. Mọi hệ hình thức phi mâu thuẫn *S* mà trong đó số học sơ cấp có thể được thực hiện, đều là không đầy đủ đối với mọi mệnh đề của số học sơ cấp, cụ thể là có những mệnh đề mà ta không thể chứng minh hay bác bỏ được trong *S*.

2. Đối với mọi hệ hình thức phi mâu thuẫn *S* mà trong đó số học sơ cấp có thể được thực hiện, thì tính phi mẫu thuẫn của *S* không thể được chứng minh trong chính *S*.

Từ ngữ ở đây dường như khá ôn hòa, song những hệ quả đối với chương trình của những người theo chủ nghĩa hình thức thì có những ảnh hưởng rất sâu rộng. Nói một cách phần nào hơi đơn giản hóa thì các định lý bất toàn đã chứng minh được rằng chương trình hình thức chủ nghĩa của Hilbert, về căn bản, đã thất bại ngay từ lúc bắt đầu. Gôdel đã chứng tỏ rằng bất kỳ một hệ hình thức đủ mạnh nào để đáng được quan tâm thì nó hoặc là bất toàn hoặc là không nhất quán một cách cố hữu. Tức là, trong trường hợp may lắm, sẽ luôn luôn có sự khẳng định rằng hệ hình thức hoặc là không chứng minh được hoặc là không bác bỏ được. Còn trong trường hợp xấu nhất thì hệ sẽ dẫn đến mâu thuẫn. Vì đối với phát biểu *T* bất kỳ: hoặc *T* hoặc không phải-*T* phải là đúng, nên thực tế là một hệ hình thức hữu hạn có thể hoặc không chứng minh được hoặc không bác bỏ được một số khẳng định, có nghĩa là luôn tồn tại những phát biểu đúng mà ta không thể chứng minh được trong hệ đó. Nói cách khác, Gôdel đã chứng minh được rằng không có hệ hình thức nào được tạo bởi một tập hữu hạn các tiên đề và quy tắc suy luận *bao giờ cũng* có thể thâu tóm được toàn bộ các chân lý của toán học. Điều nhiều nhất mà người ta có thể hy vọng đó là sự tiên đề hóa được thừa nhận một cách rộng rãi chỉ là bất toàn, chứ không phải là mâu thuẫn.

Bản thân Gôdel tin rằng một khái niệm Platonic, độc lập của chân lý toán học là thực sự tồn tại. Trong một bài báo công bố năm 1947, ông viết:

> Song, mặc cho sự xa cách giữa chúng [các chân lý toán học] với kinh nghiệm có được từ cảm giác, chúng ta vẫn có điều gì đó giống như một sự cảm nhận về các đối tượng của lý thuyết tập hợp, khi được nhìn từ thực tế rằng các tiên đề buộc chúng ta phải coi chúng là đúng đắn. Tôi không thấy có bất kỳ lý do nào khiến chúng ta phải kém

> tin cậy vào loại cảm nhận này, tức là vào trực giác toán học, hơn là nhận thức bằng cảm giác.

Do sự xoay chuyển trớ trêu của số phận, ngay khi các nhà chủ nghĩa hình thức đã sẵn sàng cho cuộc diễu hành chiến thắng của mình, thì Kurt Gôdel - một người tự nhận là theo trường phái Platonic - đã xuất hiện và trút mưa xuống đoàn diễu hành của chương trình hình thức chủ nghĩa.

Nhà toán học nổi tiếng John von Neumann (1903-57), người lúc đó đang giảng về các công trình của Hilbert, đã hủy toàn bộ phần còn lại của khóa học đã được lên chương trình của mình và dành toàn bộ thời gian đó cho những phát hiện của Gôdel.

Gôdel là một người mà trên mọi phương diện đều phức tạp như chính các định lý của ông. Năm 1940, ông và vợ là Adele đã chạy trốn khỏi nước Áo phát xít và đến làm việc tại Viện Nghiên cứu Cao cấp ở Princeton, New Jersey. Ở đó, ông đã trở thành một người bạn tốt và là người thường xuyên đi dạo với Albert Einstein. Khi Gôdel xin nhập quốc tịch để trở thành công dân Mỹ vào năm 1948, chính Einstein là người đã cùng với nhà toán học và kinh tế học Oskar Morgenstern (1902-77) của Đại học Princeton, đã dẫn Gôdel đến phỏng vấn tại Cơ quan nhập cư và quốc tịch. Các sự kiện xung quanh cuộc phỏng vấn này đã được nhiều người biết, song chúng cũng tiết lộ nhiều về cá tính của Gôdel nên tôi sẽ kể lại đầy đủ ở đây, *một cách chính xác* những gì người ta đã ghi lại được theo hồi ức của Oskar Morgenstern vào ngày 13 tháng 9 năm 1971. Tôi rất cảm ơn bà Dorothy Morgenstern Thomas, quả phụ của Morgenstern, và Viện Nghiên cứu Cao cấp đã cung cấp cho tôi một bản sao của tài liệu này:

Đó là vào năm 1946 khi Gôdel muốn trở thành công dân của nước Mỹ. Ông nhờ tôi làm người làm chứng cho ông, còn người làm chứng thứ hai, thì ông đã đề nghị Albert Einstein, người cũng rất vui vẻ nhận lời. Einstein và tôi thỉnh thoảng có gặp nhau và cùng nhau dự đoán xem điều gì sẽ xảy ra trong thời gian này trước khi tiến hành quá trình nhập quốc tịch và cả trong quá trình đó nữa.

Tôi gặp Gôdel vài lần trong suốt vài tháng trước khi sự kiện này bắt đầu để chuẩn bị một cách cẩn thận. Vì là người rất chu đáo nên ông ấy bắt đầu tự tìm hiểu về lịch sử của việc xâm chiếm Bắc Mỹ của con người. Điều này dần dẫn tới việc nghiên cứu lịch sử của người da đỏ Mỹ, các bộ lạc của họ, v.v... Ông ấy gọi điện thoại cho tôi nhiều lần để hỏi mượn tài liệu mà ông nghiên cứu rất kỹ lưỡng. Dần dà có nhiều câu hỏi nảy sinh và tất nhiên rất nhiều nghi ngờ đại loại như các câu chuyện lịch sử này có thực sự đúng hay không và những hoàn cảnh đặc biệt nào đã được tiết lộ trong đó. Từ đó, trong nhiều tuần tiếp sau, Gôdel dần dần đi đến chỗ nghiên cứu lịch sử nước Mỹ, đặc biệt tập trung vào các vấn đề liên quan đến luật hiến pháp. Và điều đó cũng dẫn ông tới nghiên cứu về Princeton, và đặc biệt là ông muốn biết từ tôi rằng đâu là ranh giới giữa thị xã và ngoại ô. Tôi đã cố gắng giải thích rằng tất cả những điều đó là không cần thiết, tất nhiên rồi, nhưng không có kết quả. Ông vẫn khăng khăng tìm kiếm tất cả những thực tế mà ông muốn biết và vì vậy tôi đã cung cấp mọi thông tin thích hợp cho ông ấy, kể cả về Princeton. Sau đó ông ấy muốn biết Hội đồng thành phố và cả Hội đồng thị trấn nữa, đã được bầu ra như thế nào và ai là Thị trưởng, và Hội đồng thị trấn hoạt động ra sao. Ông nghĩ là ông có thể sẽ bị hỏi về những vấn đề như vậy. Nếu ông bộc lộ là mình không biết gì về thị trấn mà ông đang sống thì sẽ có ấn tượng xấu.

Tôi đã cố gắng thuyết phục ông ấy rằng những câu hỏi kiểu như vậy chả bao giờ người ta hỏi đâu, rằng đa số các câu hỏi thực sự chỉ là hình thức thôi và ông sẽ trả lời chẳng khó khăn gì; rằng quá lắm là họ có thể hỏi chính phủ hiện nay mà đất nước chúng ta đang có thuộc loại nào hay tòa án cao nhất gọi là gì, và đại loại như vậy. Bất luận thế nào, ông ấy vẫn cứ nghiên cứu Hiến pháp. Giờ mới đến phần thú vị. Ông ấy bảo tôi một cách khá xúc động rằng khi xem xét Hiến pháp, với sự lo lắng của mình, ông đã phát hiện một số mâu thuẫn trong đó và rằng ông có thể chỉ ra cách để một người bất kỳ trở thành một nhà độc tài và thiết lập một chế độ phát xít, một cách hoàn toàn hợp pháp, điều mà những người lập ra Hiến pháp không dự tính tới. Tôi bảo ông ấy rằng rất khó có thể xảy ra những chuyện kiểu như vậy, thậm chí cứ giả sử là ông ấy đúng đi nữa thì tất nhiên là tôi vẫn nghi ngờ. Nhưng ông ấy vẫn cố chấp và vì vậy chúng tôi đã có nhiều cuộc trò chuyện về vấn đề này. Tôi đã cố thuyết phục ông ấy rằng nên tránh đừng nhắc đến những vấn đề kiểu như vậy ở buổi kiểm tra trước tòa ở Trenton, và tôi cũng nói với Einstein về điều đó: ông ấy đã hoảng sợ vì ý tưởng kiểu như vậy lại có thể nảy ra trong đầu Gôdel và ông ấy cũng khuyên Gôdel không nên lo lắng và cũng đừng thảo luận về vấn đề đó nữa.

Nhiều tháng trôi qua và cuối cùng ngày hẹn ở Trenton đã tới. Vào ngày đặc biệt đó, tôi đã đưa xe đến đón Gôdel. Ông ấy ngồi ở ghế sau và sau đó chúng tôi ghé qua đón Einstein tại nhà ông ấy ở phố Mercer, và từ đó chúng tôi lái xe thẳng tới Trenton. Trên đường đi, Einstein nhìn quanh một chút rồi nói: "Này, Gôdel, giờ thì anh *thực sự* đã chuẩn bị tốt cho buổi kiểm tra này chứ hả?" Tất nhiên, câu hỏi này làm Gôdel bồn chồn khủng khiếp, và đó chính xác là điều mà Einstein dự tính và ông ấy vô cùng vui thích khi thấy vẻ lo lắng trên khuôn mặt của Gôdel. Khi tới Trenton, chúng tôi được dẫn vào một căn phòng lớn và trong khi thông thường thì những người làm chứng bị phỏng vấn riêng, nhưng vì sự có mặt của Einstein nên có một ngoại lệ và tất cả ba chúng tôi được mời vào ngồi cùng nhau, Gôdel ngồi ở giữa. Người kiểm tra [*sic*] đầu tiên hỏi Einstein và sau đó hỏi tôi là chúng tôi có nghĩ Gôdel sẽ là một công dân tốt không. Chúng tôi đảm bảo với anh ta rằng điều đó là chắc chắn, rằng ông ấy là một người đàn ông ưu tú, và v.v... Rồi sau đó thì anh ta quay sang Gôdel và nói, "Nào, giờ thì Mr. Gôdel, ông là người nước nào?".

Gôdel: Tôi là người nước nào à? Áo.

Người kiểm tra: Chính phủ ở nước Áo các ông thuộc loại nào?

Gôdel: Đã từng là nước cộng hòa, nhưng hiến pháp thì sao đó mà cuối cùng nó lại thay đổi thành một kiểu độc tài.

Người kiểm tra: Ồ! Thế thì tệ thật. Điều đó không thể xảy ra ở đất nước này đâu.

Gôdel: Ồ, có đấy, tôi có thể *chứng minh* điều đó.

Vậy là trong số tất cả những câu hỏi có thể, thì chính câu hỏi chí mạng lại được người kiểm tra nhắc đến. Einstein và tôi hoảng sợ trong suốt quá trình trao đổi đó; người kiểm tra đủ thông minh để nhanh chóng vỗ về Gôdel và nói, "Ồ lạy Chúa, chúng ta không đi vào vấn đề này nhé", và dừng cuộc kiểm tra tại đó, và điều này thực sự giải thoát cho chúng tôi. Cuối cùng, chúng tôi đi ra và khi đang bước tới cửa thang máy, một người đàn ông chạy đuổi theo chúng tôi với một mẩu giấy và cây bút trong tay, anh ta tiến tới chỗ Einstein và xin ông ấy chữ ký. Einstein cảm ơn. Khi chúng tôi đi xuống trong thang máy, tôi quay lại nhìn Einstein và nói, "Thật bực mình khi bị nhiều người quấy rầy kiểu như vậy." Einstein trả lời, "Anh biết đấy, điều này chẳng qua chỉ là tàn dư của tục ăn thịt người thôi mà." Tôi không hiểu và hỏi lại: "Sao lại thế? ". Ông ấy bảo: "Đúng thế, trước đây họ muốn máu của anh, còn giờ thì họ muốn mực của anh".

Sau đó chúng tôi ra về, lái xe trở lại Princeton, và khi tới góc phố Mercer, tôi chợt hỏi Einstein là ông có muốn đi đến Viện không hay là muốn về nhà. Ông ấy bảo: "Đưa tôi về nhà đi. Dù sao thì công việc của tôi cũng không

> còn đáng gì nữa rồi". Sau đó, ông ấy trích từ một bài hát về chính trị của Mỹ (không may là tôi không còn nhớ được lời, rất có thể tôi đã ghi nó trong sổ tay và tôi chắc chắn sẽ nhận ra nó nếu có ai hát lại câu hát cụ thể đó). Sau khi tới nhà Einstein, ông ấy lại quay về phía Gôdel và nói: "Này, Gôdel, đây là lần kiểm tra của anh, nhưng vẫn còn lần kiểm tra cuối cùng." Gôdel: "Chúa ơi, vẫn còn lần kiểm tra nữa sao?" và ông ấy trông đã rất lo lắng rồi. Dừng một lát, Einstein nói tiếp, " Gôdel, lần kiểm tra tiếp theo là khi nào thì anh bước chân vào ngôi mộ của mình.". Gôdel: "Nhưng này Einstein, tôi sẽ không bước chân vào mộ của tôi". Einstein bèn đáp lại, " Gôdel, chỉ là đùa thôi mà." và rồi ông ấy quay người bước vào nhà. Tôi đưa Gôdel về nhà. Mọi người đều thở phào vì chuyện khủng khiếp đã qua; Gôdel lại có cái đầu tự do một lần nữa để dành cho những vấn đề triết học và lôgic.

Những năm tháng sau này của cuộc đời, Gôdel đã phải chịu đựng một khoảng thời gian dài bị rối loạn tâm thần nghiêm trọng, khiến ông không chịu ăn uống gì. Ông mất vào ngày 14 tháng 1 năm 1978 vì thiếu dinh dưỡng và kiệt sức.

Trái với một số quan niệm sai lầm phổ biến, các định lý bất toàn của Gôdel không hàm ý rằng một số chân lý sẽ không bao giờ được biết đến. Từ những định lý đó, chúng ta cũng không thể suy ra rằng khả năng hiểu biết của con người vì lý do gì đấy là có giới hạn. Mà thực ra, các định lý này chỉ cho thấy những điểm yếu và thiếu sót của các hệ hình thức. Vì vậy, nó có thể dẫn đến một điều ngạc nhiên là mặc dù những định lý này có ảnh hưởng sâu rộng đối với triết học của toán học, nhưng tác động của chúng đến toán học như là một bộ máy xây dựng lý thuyết thì lại là rất tối thiểu. Thực tế, trong suốt nhiều thập kỷ xung quanh thời điểm công bố chứng minh của Gôdel, toán học đã đạt tới một số thành công ngoạn mục nhất của nó trong các lý thuyết vật lý về vũ trụ. Không còn bị vứt bỏ như là thứ không đáng tin cậy, toán học và các kết luận lôgic của nó ngày càng trở nên thiết yếu đối với sự tìm hiểu về vũ trụ.

Tuy nhiên, điều này có nghĩa là câu đố về "tính hiệu quả đến phi lý" của toán học thậm chí còn trở nên hóc búa hơn. Hãy nghĩ về điều này một chút. Hãy thử hình dung xem điều gì sẽ xảy ra nếu như nỗ lực của các nhà lôgic hoàn toàn thành công. Điều này sẽ dẫn đến hệ quả là toán học bắt nguồn hoàn toàn từ lôgic - mà đúng ra là từ các luật của tư duy. Nhưng làm thế nào mà một khoa học suy diễn như thế lại có thể phù hợp một cách kỳ diệu với các hiện tượng tự nhiên đến như vậy? Mối quan hệ giữa lôgic hình thức (có thể chúng ta nên nói là lôgic hình thức của con người) và vũ trụ là gì? Câu trả lời cũng không trở nên rõ ràng hơn sau Hilbert và Gôdel. Giờ đây tất cả những gì đã tồn tại chỉ là một "trò chơi" hình thức bất toàn, được diễn đạt bằng ngôn ngữ toán học. Vậy thì làm thế nào mà các mô hình dựa trên một hệ "không đáng tin cậy" như vậy lại có thể tạo ra được những hiểu biết sâu sắc về vũ trụ và sự vận hành của nó? Trước khi thử trả lời những câu hỏi này, tôi muốn làm sâu sắc chúng thêm một chút nữa bằng cách xem xét một số các nghiên cứu tình huống (*case study*) nhằm minh họa những điểm tinh tế của tính hiệu quả của toán học.

CHƯƠNG 8

TÍNH HIỆU QUẢ ĐẾN PHI LÝ ?

Trong chương 1, tôi đã lưu ý rằng thành công của toán học trong các lý thuyết vật lý có hai khía cạnh: một tôi gọi là “chủ động” và hai là “thụ động”. Khía cạnh “chủ động” phản ánh thực tế là các nhà khoa học phát biểu các định luật của tự nhiên bằng các thuật ngữ toán học có thể áp dụng được một cách rõ ràng. Tức là, họ sử dụng các thực thể toán học, các quan hệ và các phương trình đã được phát triển cùng với một ứng dụng trong óc, mà thường là cho chính chủ đề đang xét. Trong những trường hợp đó, các nhà nghiên cứu có xu hướng dựa vào những điều tương tự cảm nhận được giữa các tính chất của những khái niệm toán học và các hiện tượng quan sát được hay các kết quả thí nghiệm. Tính hiệu quả của toán học có thể dường như không đáng ngạc nhiên lắm trong các trường hợp này, vì người ta có thể lý luận rằng các lý thuyết đó đã được “may cắt” sao cho phù hợp với quan sát. Tuy nhiên, vẫn còn có một phần đáng kinh ngạc của việc sử dụng “chủ động” liên quan đến tính chính xác, mà tôi sẽ bàn đến dưới đây, ở chương này. Tính hiệu quả “thụ động” có liên quan với những trường hợp mà trong đó toàn bộ các lý thuyết toán học trừu tượng được phát triển, mà không dự tính cho một ứng dụng nào, và chỉ sau đó mới biến hình thành các mô hình vật lý có sức tiên đoán mạnh mẽ. *Lý thuyết nút* cung cấp một ví dụ ngoạn mục về tác dụng tương hỗ giữa tính hiệu quả chủ động và thụ động.

Nút

Nút là thứ mà thậm chí còn tạo nên cả những huyền thoại. Bạn có thể nhớ lại câu chuyện thần thoại Hy Lạp về cái nút thắt Gordius. Một lời sấm nói với người dân thành Phrygia rằng vị vua tiếp theo của họ là người đầu tiên tiến vào thủ đô trên một chiếc xe bò kéo. Gordius, một người nông dân hoàn toàn tình cờ, ngồi trên một chiếc xe bò kéo đi vào thị trấn, và thế là bỗng nhiên trở thành vua. Dạt dào lòng biết ơn, Gordius đã dâng chiếc xe của mình cho các vị thần, và ông đã buộc nó vào cọc bằng một nút thắt phức tạp nhằm thách đố mọi cố gắng cởi nút thắt đó ra. Sau này một lời tiên tri tuyên bố rằng ai cởi được cái nút thắt đó sẽ trở thành vua của châu Á. Như định mệnh an bài, người đã cởi được nút thắt đó (vào khoảng năm 333 trước CN) chính là Alexander Đại đế, và ông thực sự đã trở thành người cai trị châu Á. Tuy nhiên, cách cởi nút thắt Gordius của Alexander lại không phải chính xác là cách mà chúng ta gọi là tài tình hay thậm chí là cởi đẹp - thực ra ông ta đã dùng kiếm của mình để cắt cái nút đó!

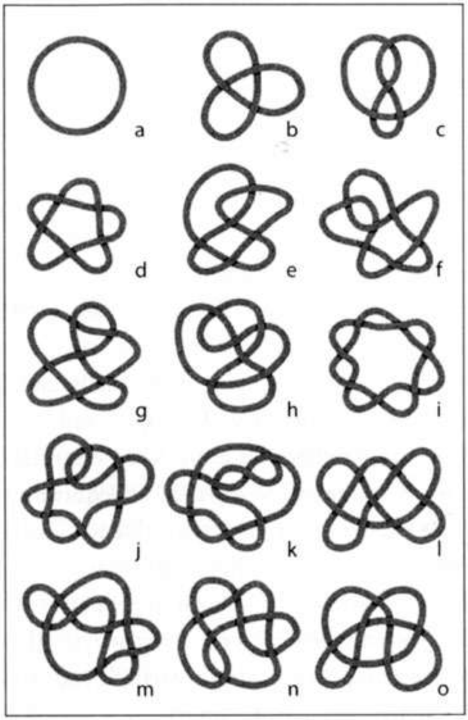
Nhưng chúng ta không phải đi cả chặng đường dài trở lại Hy Lạp cổ đại chỉ để thấy các nút thắt. Một đứa trẻ buộc dây giày, một cô gái buộc bím tóc, một bà đan áo len hay một thủy thủ cột con thuyền của mình đều sử dụng một loại nút thắt nào đó.

Các loại nút thắt khác nhau thậm chí còn được đặt những cái tên rất giàu tưởng tượng, như "nút thắt của người đánh cá", "nút buộc của người Anh", nút "vuốt mèo", "nút thắt tình yêu chân thành", và "nút thắt của người treo cổ". Đặc biệt là những nút thắt hàng hải, về mặt lịch sử, đã được xem là đủ quan trọng để gợi cảm hứng viết nên cả môåt pho sách về chúng vào thế kỷ 17 ở Anh. Một trong những cuốn sách này, một cách tình cờ, đã được viết không bởi ai khác mà chính là nhà thám hiểm Anh John Smith (1580-1631), người được biết đến nhiều hơn bởi mối quan hệ lãng mạn của ông với công chúa thổ dân Mỹ Pocahontas.

Lý thuyết toán học về các nút ra đời vào năm 1771 trong một bài báo của nhà toán học Pháp Alexandre - Théophile Vandermonde (1735-96). Ông là người đầu tiên nhận ra rằng các nút có thể được nghiên cứu như là một bộ phận của môn *hình học vị trí*, lĩnh vực khảo sát các mối quan hệ chỉ phụ thuộc vào vị trí, chứ không quan tâm tới kích thước và việc tính toán các đại lượng. Vai trò tiếp theo trong sự phát triển của lý thuyết nút, là "Hoàng tử toán học" người Đức, Carl Friedrich Gauss. Một số ghi chép của Gauss có chứa các hình vẽ và những mô tả chi tiết về các nút, cùng với một số khảo sát phân tích về các tính chất của chúng. Các công trình của Vandermonde, Gauss và một số nhà toán học khác ở thế kỷ 19 đều rất quan trọng, nhưng động lực chủ yếu nằm phía sau lý thuyết nút hiện đại lại đến từ một nguồn không hề mong đợi - đó là nỗ lực giải thích về cấu trúc của vật chất. Ý tưởng này khởi nguồn trong óc của nhà vật lý nổi tiếng người Anh William Thomson, người ngày nay được biết đến nhiều hơn dưới cái tên Huân tước Kelvin (1824-1907). Nỗ lực của Thomson tập trung vào việc xây dựng một lý thuyết về nguyên tử, mà thời đó được coi là những viên gạch tạo nên vật chất. Theo sự phỏng đoán thuần túy tưởng tượng của ông, thì các nguyên tử thực sự là các ống ête bị thắt nút, với ête là một chất bí ẩn được cho là tràn ngập khắp không gian. Sự phong phú của các chất hóa học, theo mô hình này, được giải thích là do sự đa dạng của các nút thắt này.

Nếu như phỏng đoán của Thomson ngày nay nghe có vẻ như là điên rồ thì chỉ là bởi vì chúng ta có cả một thế kỷ để làm quen và kiểm tra bằng thực nghiệm mô hình đúng của nguyên tử, trong đó các electron quay xung quanh hạt nhân nguyên tử. Nhưng đây là nước Anh vào những năm 1860, và Thomson bị ấn tượng một cách sâu sắc về sự ổn định của những vòng khói thuốc phức tạp và khả năng rung động của chúng - hai tính chất được xem như là cốt yếu đối với việc lập mô hình nguyên tử vào thời đó. Để phát triển các nút thắt tương tự như bảng tuần hoàn các nguyên tố, Thomson đã phải phân loại các nút - tìm xem có thể tồn tại những kiểu nút khác nhau nào - và điều cần thiết cho việc lập bảng các nút thắt đó đã làm bùng lên sự quan tâm nghiêm túc đối với toán học của các nút.

Như tôi đã giải thích ở Chương 1, một nút thắt toán học trông giống như một nút thắt quen thuộc ở một sợi dây bình thường, chỉ có điều hai đầu dây được nối vào nhau. Nói cách khác, một nút toán học được mô tả như một đường cong khép kín không có đầu hở. Một số ví dụ được trình bày ở hình 54, trong đó các nút thắt ba chiều được biểu diễn bằng hình chiếu, hay bóng, của chúng trên mặt phẳng. Vị trí trong không gian của hai đoạn dây bất kỳ bắt chéo nhau được chỉ ra trên hình vẽ bằng sự đứt đoạn của đường

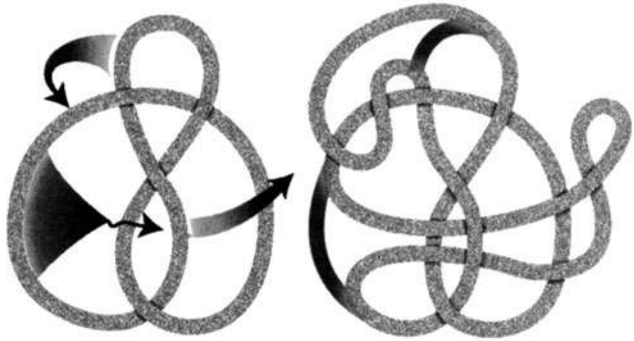


Hình 54

biểu diễn đoạn dây nằm dưới. Nút thắt đơn giản nhất - được gọi là *không nút* - chỉ đơn giản là một đường tròn khép kín (như H. 54a). *Nút thắt hình cỏ ba lá* (H. 54b) có ba đoạn bắt chéo nhau, và *nút thắt hình số 8* (H.54c) có bốn đọan bắt chéo nhau. Trong lý thuyết của Thomson, ba nút này, về nguyên tắc, có thể là mô hình của ba nguyên tử có độ phức tạp tăng dần, là nguyên tử hyđro, cácbon, và ôxy tương ứng. Tuy nhiên, một sự phân loại đầy đủ các nút là cực kỳ cần thiết, và người đã bắt tay để phân loại các nút lại chính là bạn của Thomson, nhà vật lý toán người Scotland Peter Guthrie Tait (1831-1901).

Thực ra, những loại câu hỏi mà các nhà toán học đặt ra về các nút không khác mấy so với những câu hỏi mà người ta có thể đặt ra về một sợi dây thắt nút thông thường hay một cuộn chỉ rối. Nó có thực sự bị thắt nút hay không? Nút này có tương đương với một nút kia không? Ý nghĩa của câu hỏi sau rất đơn giản: một nút có thể biến thành dạng một nút khác mà không phải làm đứt dây ra hay kéo dây này qua dây khác như các vành nối với nhau của nhà ảo thuật? Tầm quan trọng của câu hỏi này được minh họa ở hình 55, nó cho thấy bằng một số thao tác bằng tay, người ta có thể nhận được hai biểu diễn khác nhau của cùng một nút. Sau hết, lý thuyết nút tìm kiếm con đường chính xác nào đó để chứng minh rằng một số nút (như nút cỏ ba lá và nút hình số 8; H.54b và 54c) là thực sự khác nhau, trong khi không cần đếm xỉa đến sự khác nhau bên ngoài của các nút khác, như hai nút ở hình 55.

Tait bắt đầu công việc phân loại của mình một cách rất khó khăn. Không có một nguyên lý toán học rõ ràng nào dẫn dắt, ông đã lập các danh mục những đường cong có một chỗ bắt chéo, hai chỗ bắt chéo, ba chỗ bắt chéo, và cứ tiếp tục như vậy. Cộng tác với Reverend Thomas Penyngton Kirkman (1806-95), cũng là một nhà toán học không chuyên, ông bắt đầu gạn lọc những đường cong để loại đi những trùng lặp do các nút tương đương. Đây không phải là một nhiệm vụ tầm thường. Bạn phải hiểu rằng, cứ mỗi một lần bắt chéo nhau, có hai cách để chọn sợi dây nào ở trên cùng. Điều này có nghĩa là nếu một đường cong có, giả sử như, 7 chỗ bắt chéo nhau thì sẽ có $2\times2 \times 2 \times2 \times 2 \times2 \times 2 = 128$ nút phải xem



Hình 55

xét. Nói cách khác, cuộc sống con người sẽ là quá ngắn để có thể hoàn tất việc phân loại, theo cách trực giác này, các nút với 10 lần, hoặc nhiều hơn, bắt chéo nhau. Tuy nhiên, công việc của Tait không phải không được đánh giá cao. James Clerk Maxwell vĩ đại, người đã đưa ra thuyết cổ điển về điện và từ, đã rất trân trọng lý thuyết nguyên tử của Thomson, và đã nhận xét rằng "nó đã thỏa mãn nhiều điều kiện hơn bất kỳ lý thuyết về nguyên tử nào được xem xét cho đến nay". Đồng thời nhận rõ sự đóng góp của Tait, Maxwell đã tặng bài thơ sau:

Tháo cuộn dây xoắn
Thành nếp hoàn hảo
Chặn các vòng và mối nối
Rồi xuyên vào nhau

Đến năm 1877, Tait đã phân loại được các nút luân phiên có tới 7 lần bắt chéo nhau. Các nút luân phiên là những nút mà trong đó các chỗ bắt chéo luân phiên lên trên và xuống dưới, giống như sợi chỉ trong một tấm thảm dệt. Tait cũng thực hiện được một số khám phá thực dụng hơn, dưới dạng các nguyên lý cơ bản mà sau này được đặt tên là những *phỏng đoán của Tait*. Cũng cần nói thêm rằng những phỏng đoán này căn bản đến mức chúng đã cưỡng lại mọi nỗ lực chứng minh chúng một cách chặt chẽ cho mãi đến tận cuối những năm 1980. Năm 1885, Tait đã công bố bảng các nút có tới 10 lần bắt chéo nhau, và ông quyết định dừng ở đó. Một cách độc lập, một giáo sư ở trường Đại học Nebraska là Charles Newton Little (1858-1923) cũng công bố (vào năm 1899) bảng các nút không luân phiên với 10 hoặc ít hơn số lần bắt chéo nhau.

Huân tước Kevin luôn dành tình cảm trìu mến cho Tait. Tại một buổi lễ kỷ niệm tại trường Peterhouse College ở Cambridge, nơi có treo bức chân dung của Tait, Lord Kevin đã nói:

> Tôi nhớ Tait có lần nhận xét rằng không gì khác ngoài khoa học mới xứng đáng để sống vì nó. Đó là lời nói chân thành, nhưng bản thân Tait lại chứng minh rằng điều đó là không đúng. Tait thực sự là một người đọc vĩ đại. Ông đã thuộc lòng Shakespear, Dickens và Thackeray. Trí nhớ của ông thật tuyệt vời. Những điều mà một khi ông đã đọc một cách đồng cảm thì ông sẽ nhớ mãi.

Thật không may là lúc mà Tait và Little hoàn thành công việc khổng lồ của mình trong việc lập bảng các nút thì lý thuyết về nguyên tử của Kelvin lại hoàn toàn bị loại bỏ. Dù vậy, sự quan tâm đến các nút vẫn tiếp tục vì lợi ích của chính nó, chỉ có sự khác biệt là, như nhà toán học Michael Atiyah đã nói, “nghiên cứu về các nút trở thành một nhánh bí truyền của toán học thuần túy". Một lĩnh vực của toán học, nơi mà các đại lượng như kích thước, độ trơn, và theo một nghĩa nào đó thậm chí cả hình dạng nữa cũng bị bỏ qua được gọi là *tôpô*. Tôpô - hình học của tấm cao su - nghiên cứu những tính chất vẫn còn không thay đổi khi không gian bị kéo giãn hay biến dạng theo bất kỳ cách nào (nhưng không được xé thành từng mảnh hay đục lỗ). Do chính bản chất của chúng, các nút cũng thuộc tôpô. Một cách tình cờ, các nhà toán học cũng đã có sự phân biệt các *nút*, đó là các vòng thắt nút đơn, các *vòng xích*, là tập hợp các vòng thắt nút móc nối với nhau, và *dây tết*, là tập hợp của các sợi dây dọc nối với một thanh ngang ở đầu trên và đầu dưới.

Nếu bạn chưa ấn tượng với khó khăn của việc phân loại các nút, thì hãy xem thực tế rất ấn tượng sau đây. Bảng của Charles Little, công bố vào năm 1899 sau 6 năm làm việc, có chứa 43 nút không luân phiên có 10 lần bắt chéo nhau. Bảng này đã được các nhà toán học xem xét một cách kỹ lưỡng và sau 75 năm năm mới được công nhận là chính xác. Sau đó vào năm 1974, nhà toán học kiêm luật sư ở New York là Kenneth Perko đã tiến hành thực nghiệm với những sợi dây ngay trong phòng khách nhà ông. Trước sự ngạc nhiên của chính mình, ông đã khám phá ra rằng hai trong số nút trong bảng của Little thực tế chỉ là một. Chúng ta giờ thì tin rằng chỉ có 42 nút không luân phiên có 10 lần bắt chéo nhau là thực sự khác nhau.

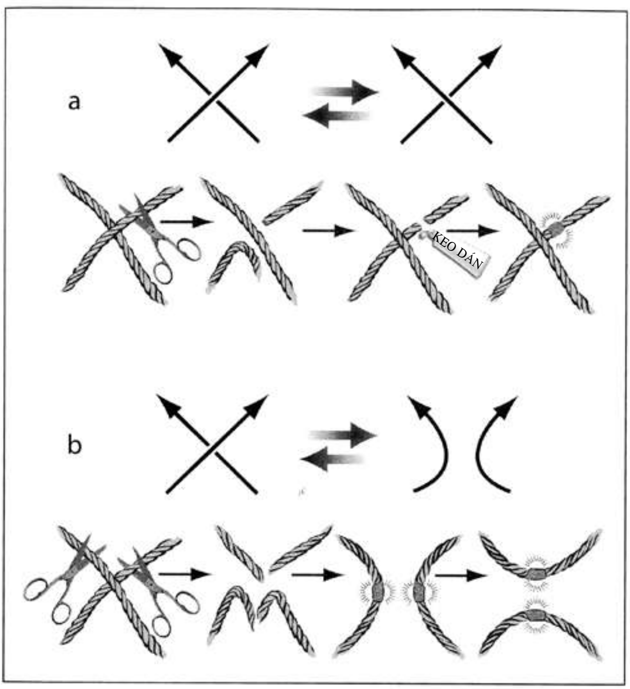
Trong khi thế kỷ 20 chứng kiến những bước tiến mạnh mẽ của tôpô thì tiến độ của lý thuyết nút lại diễn ra khá chậm. Một trong những mục tiêu chính của các nhà toán học khi nghiên cứu các nút là xác định các tính chất thực sự khác biệt của các nút. Những tính chất như vậy được gọi là các *bất biến của các nút* - chúng biểu thị các đại lượng mà trong đó hai hình chiếu khác nhau của cùng một nút thì cho chính xác cùng một giá trị. Nói cách khác, một bất biến lý tưởng thực sự là một "dấu vân tay" của nút, đó là một đặc tính của nút không thay đổi trong bất cứ biến dạng nào của nút đó. Có lẽ bất biến đơn giản nhất mà người ta có thể nghĩ tới đó là số lần bắt chéo nhau nhỏ nhất khi vẽ một nút. Chẳng hạn, cho dù bạn có cố gắng gỡ rối nút ba lá (hình 54b) như thế nào đi nữa thì bạn cũng sẽ không bao giờ làm giảm số lần bắt chéo nhau xuống còn nhỏ hơn ba. Thật không may là có nhiều lý do khiến cho số lần bắt chéo nhau nhỏ nhất lại không phải là bất biến hữu dụng nhất. Trước hết, như hình 55 cho thấy, không phải bao giờ cũng dễ dàng xác định được một nút đã được vẽ với số lần bắt chéo nhau nhỏ nhất hay không. Thứ hai và quan trọng hơn cả là nhiều nút thực sự khác nhau lại có cùng số lần bắt chéo nhau. Trong hình 54 chẳng hạn, có ba nút khác nhau có cùng 6 lần bắt chéo nhau. Vì vậy, số lần bắt chéo nhau nhỏ nhất không phân biệt được hầu hết các nút. Cuối cùng, số lần bắt chéo nhau nhỏ nhất, do bản chất quá đơn giản của nó, không cung cấp cho ta nhiều hiểu biết sâu sắc về các tính chất của nút nói chung.

Một sự đột phá trong lý thuyết nút xuất hiện vào năm 1928, khi nhà toán học Mỹ James Waddell Alexander (1888-1971) đã khám phá ra một bất biến quan trọng mà sau này nổi tiếng dưới cái tên *đa thức Alexander*. Về cơ bản, đa thức Alexander là một biểu thức đại số sử dụng sự sắp xếp các chỗ bắt chéo nhau để dán nhãn cho nút. Đặc biệt quan trọng là nếu hai nút có đa thức Alexander khác nhau thì các nút này thực sự là khác nhau. Nhưng điều không hay là hai nút có cùng đa thức vẫn có thể là các nút khác nhau. Vì vậy, mặc dù là rất hữu dụng song đa thức Alexander vẫn chưa phải là hoàn hảo trong việc phân biệt các nút.

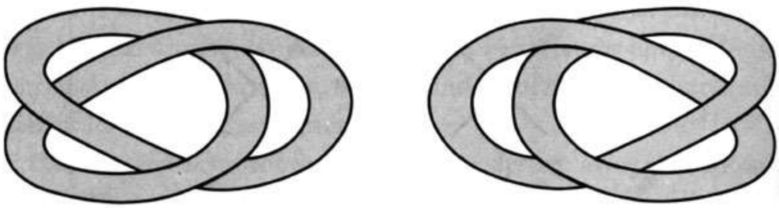
Các nhà toán học đã mất bốn thập kỷ tiếp theo để khám phá cơ sở khái niệm cho đa thức Alexander và thu được những hiểu biết sâu xa hơn về các tính chất của nút. Nhưng tại sao họ lại phải đào sâu vào chủ đề này như vậy? Chắc chắn không phải là vì bất kỳ ứng dụng thực tế nào. Mô hình nguyên tử của Thomson đã bị lãng quên từ lâu và không có vấn đề gì khác có thể nhìn thấy trong khoa học, kinh tế học, kiến trúc hay lĩnh vực nào khác có vẻ đòi hỏi một lý thuyết nút cả. Các nhà toán học đã phải dành vô số thời gian cho các nút chỉ là bởi vì họ tò mò mà thôi! Với những cá nhân này, ý tưởng tìm hiểu các nút và các nguyên lý chi phối chúng là cực kỳ đẹp đẽ. Sự lóe sáng bất ngờ của sự hiểu biết sâu sắc tạo ra bởi đa thức Alexander thực sự là không thể cưỡng lại được đối với các nhà toán học cũng giống như thách thức trèo lên đỉnh núi Everest đối với George Mallory, người đã có câu trả lời nổi tiếng “Vì nó ở đó” cho câu hỏi tại sao ông lại muốn trèo lên ngọn núi đó.

Vào cuối những năm 1960, một nhà toán học người Mỹ gốc Anh là John Horton Conway đã khám phá ra một thủ tục “tháo gỡ” các nút, và từ đó phát lộ ra mối quan hệ nằm ẩn bên dưới giữa các nút và đa thức Alexander của chúng. Đặc biệt, Conway đã giới thiệu hai “phẫu thuật” đơn giản có thể dùng làm cơ sở để xác định một bất biến của nút. Hai phẫu thuật của Conway, có tên là *lật* và *làm trơn*, được mô tả dưới dạng sơ đồ trong hình 56. Trong phép lật

(H.56a), chỗ bắt chéo nhau được biến đổi bằng cách chuyển sợi dây nằm trên xuống dưới sợi dây nằm dưới (hình cũng chỉ rõ cách mà người ta thực hiện biến đổi đó với một nút thực của một sợi dây). Lưu ý rằng phép lật thay đổi một cách rõ ràng bản chất của nút. Chẳng hạn, bạn có thể dễ dàng tin rằng nút ba lá ở hình 54b sẽ trở thành không nút (H. 54a) bằng phép lật. Phép làm trơn của Conway loại bỏ sự bắt chéo nhau (H. 56b), bằng cách tái nối lại các sợi dây theo cách "sai". Nhưng ngay cả với những hiểu biết



Hình 56



Hình 57

mới thu được từ công trình của Conway, các nhà toán học vẫn còn tin trong gần hai thập kỷ nữa rằng sẽ không thể tìm được bất biến nút nào khác (ngoài đa thức Alexander). Và tình hình này đã đột ngột thay đổi vào năm 1984.

Nhà toán học người Mỹ gốc New Zealand là Vaughan Jones hoàn toàn không nghiên cứu gì về nút cả. Thay vì thế, ông lại tìm hiểu một thế giới thậm chí còn trừu tượng hơn - một trong những thực thể toán học có tên là *đại số von Neumann*. Tình cờ, Jones nhận thấy có mối quan hệ nổi lên trong đại số von Neumann trông tương tự một cách đáng ngờ với một mối quan hệ trong lý thuyết nút, và ông đã tới gặp nhà lý thuyết nút Joan Birman của Đại học Columbia để thảo luận về những ứng dụng khả dĩ. Một nghiên cứu về mối quan hệ này cuối cùng cũng đã phát lộ một bất biến hoàn toàn mới của nút, được gọi là *đa thức Jones*. Đa thức Jones ngay lập tức được thừa nhận là một bất biến nhạy cảm hơn cả đa thức Alexander. Chẳng hạn, đa thức này phân biệt được các nút và hình ảnh của chúng qua gương (ví dụ như nút ba lá thuận trái và thuận phải trên H. 57), trong khi đối với chúng đa thức Alexander giống hệt nhau. Tuy nhiên, điều quan trọng hơn nữa là khám phá của

Jones đã tạo nên sự hưng phấn chưa từng thấy trong lý thuyết nút. Thông báo về một bất biến mới đã khởi phát một làn sóng nghiên cứu sôi nổi tới mức thế giới nút đột nhiên giống như sàn giao dịch chứng khoán vào ngày mà Cục dự trữ liên bang bất ngờ hạ lãi suất.

Trong khám phá của Jones còn hàm chứa nhiều điều nữa, chứ không chỉ là sự tiến triển trong lý thuyết nút. Đa thức Jones đột nhiên đã kết nối nhiều lĩnh vực còn đang lúng túng trong toán học và vật lý học, từ cơ học thống kê (chẳng hạn, sử dụng để nghiên cứu hành vi của tập hợp lớn các nguyên tử hoặc phân tử) đến các nhóm lượng tử (một nhánh của toán học có liên quan đến vật lý của thế giới hạ nguyên tử). Các nhà toán học trên khắp thế giới đắm chìm một cách háo hức vào những nỗ lực để tìm kiếm những bất biến thậm chí còn tổng quát hơn để bằng cách nào đó bao hàm được cả đa thức Alexander và đa thức Jones. Cuộc chạy đua toán học này cuối cùng đã kết thúc ở điểm mà có lẽ là kết quả đáng kinh ngạc nhất trong lịch sử cạnh tranh khoa học. Chỉ một vài tháng sau khi Jones công bố đa thức mới của mình, bốn nhóm, làm việc độc lập và sử dụng ba cách tiếp cận toán học khác nhau, đã thông báo *đồng thời* rằng họ đã khám phá ra một bất biến thậm chí còn nhạy hơn nữa. Đa thức mới này được gọi là *đa thức HOMFLY*, ghép từ chữ cái đầu trong tên của những người đã khám phá ra bất biến đó: Hoste, Ocneanu, Millett, Freyd, Lickorish và Yetter. Hơn thế nữa, cứ như thể bốn nhóm này chạm vạch đích đồng thời vẫn còn chưa đủ vậy, hai nhà toán học Ba Lan (Przytycki và Traczyk) cũng đã độc lập khám phá ra đa thức chính xác như thế song họ đã lỡ mất ngày công bố do hệ thống bưu điện trục trặc. Do đó, đa thức này cũng còn được gọi là HOMFLYPT (hay đôi khi là THOMFLYP), bổ sung thêm chữ cái đầu trong tên của các nhà toán học Ba Lan.

Kể từ đó, trong khi các bất biến nút khác vẫn được tiếp tục khám phá thì người ta vẫn chưa có được trong tay một sự phân loại hoàn chỉnh. Câu hỏi chính xác là nút nào có thể vặn và quay để tạo ra một nút khác mà không phải sử dụng kéo vẫn còn chưa có câu trả lời. Bất biến hiện đại nhất đến nay là công trình của nhà toán học người Pháp gốc Nga Maxim Kontsevich, người đã nhận giải Fields danh giá vào năm 1998 và giải Crafoord vào năm 2008. Tình cờ, vào năm 1998, Jim Hoste thuộc trường Pitzer College ở Claremont, California, và Jeffrey Weeks ở Canton, New York, đã lập bảng tất cả các nút với 16 lần bắt chéo nhau hoặc ít hơn. Một bảng giống hệt như vậy cũng đã được lập một cách độc lập bởi Morwen Thistlethwaite của Đại học Tennessee ở Knoxville. Mỗi danh sách đều chứa chính xác là 1.701.936 nút khác nhau!

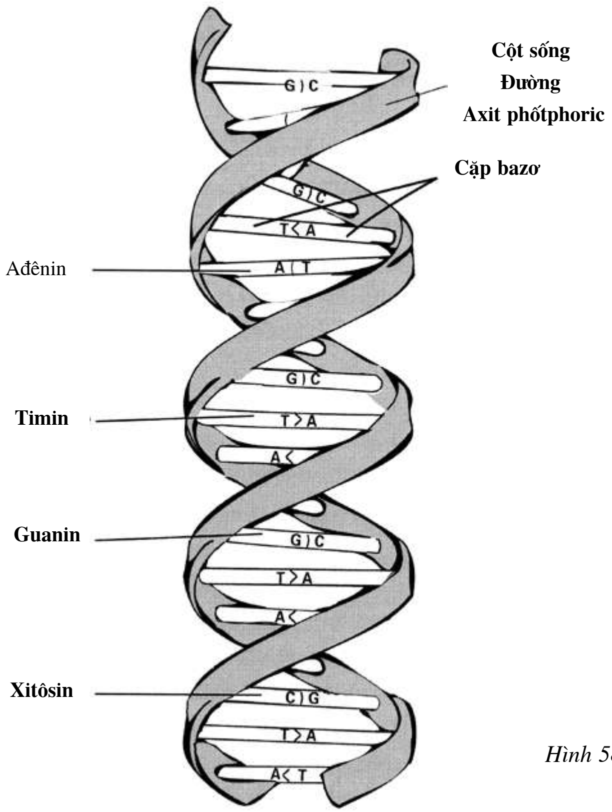
Tuy nhiên, điều thực sự đáng ngạc nhiên lại không phải đến chủ yếu từ sự tiến triển của bản thân lý thuyết nút mà là từ sự trở lại ngoạn mục và đầy bất ngờ của lý thuyết nút trong phạm vi rộng lớn của các khoa học.

Các nút của sự sống

Hãy nhớ lại rằng lý thuyết nút được thúc đẩy bởi một mô hình nguyên tử sai. Tuy nhiên, khi mô hình đó chết đi, các nhà toán học vẫn không nhụt chí. Mà ngược lại, với sự hứng khởi mạnh mẽ, họ vẫn tiếp tục lao vào cuộc hành trình dài và đầy khó khăn để cố gắng tìm hiểu chính bản thân các nút. Hãy thử hình dung xem sự vui sướng của họ sẽ lớn lao biết chừng nào khi mà lý thuyết nút bất ngờ hóa ra lại là chìa khóa để tìm hiểu những quá trình cơ bản có liên quan đến các phân tử của sự sống. Liệu bạn có còn cần một ví dụ còn tốt hơn thế về vai trò "thụ động" của toán học thuần túy trong việc giải thích tự nhiên nữa hay không?

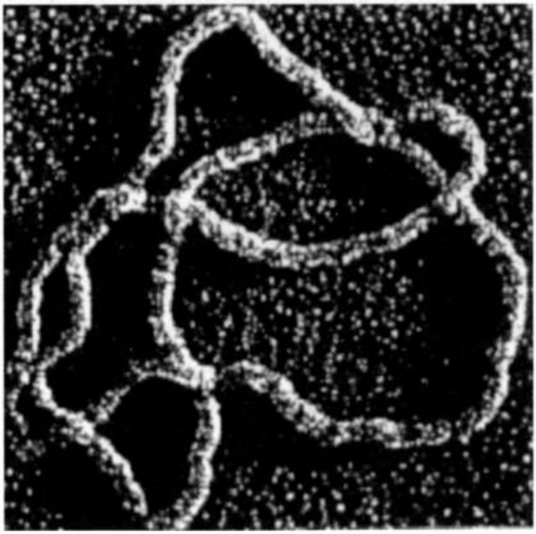
Axit điôxit ribônuclêic, hay ADN, là vật liệu di truyền của mọi tế bào. Nó gồm hai mạch (dây) rất dài xoắn xung quanh nhau hàng triệu lần để tạo nên một chuỗi xoắn kép. Dọc hai xương sống (hai mạch), mà ta có thể coi như hai tay vịn của một cái thang xoắn, các phân tử đường và axit phốtphoric sắp xếp xen kẽ nhau. Còn các "bậc" thang là các cặp bazơ kết nối với nhau bằng liên kết hyđrô theo một cách thức đã được ấn định (ađênin chỉ liên kết với timin và xitôsin chỉ liên kết với guanin; H.58). Khi một tế bào phân chia, bước đầu tiên là sao chép ADN, sao cho các tế bào con có thể nhận được các bản sao. Tương tự như vậy, trong quá trình *phiên mã* (trong đó các thông tin di truyền từ ADN được sao cho ARN), một đoạn của chuỗi xoắn kép ADN duỗi ra và chỉ một mạch đơn của ADN đóng vai trò khuôn mẫu. Sau khi sự tổng hợp các ARN hoàn tất, ADN lại cuộn trở lại chuỗi xoắn của nó. Tuy nhiên, cả quá trình sao chép lẫn phiên mã đều không dễ dàng vì ADN thắt nút và xoắn chặt (để nén sự lưu trữ thông tin) tới mức nếu không có cơ chế tháo gỡ nào đó được thực hiện thì quá trình cơ bản này của sự sống không thể được tiến hành một cách suôn sẻ. Thêm vào đó, để quá trình sao chép hoàn tất, các phân tử ADN con phải được gỡ nút, và ADN bố mẹ cuối cùng lại phải trở về cấu hình ban đầu của nó.

Tác nhân chịu trách nhiệm gỡ nút và gỡ rối là các enzyme. Enzyme có thể luồn một mạch đơn ADN qua mạch kia bằng việc



Hình 58

cắt đứt tạm thời rồi nối lại hai đầu một cách khác nhau. Bạn có thấy quá trình này nghe có vẻ quen quen không? Đó chính xác là những phẫu thuật mà Conway đã đưa vào để khám phá các nút toán học (được biểu diễn trên H.56). Nói cách khác, theo quan điểm tôpô, ADN chính là một nút phức hợp phải được gỡ nút bằng các enzyme để cho việc sao chép và phiên mã có thể diễn ra. Bằng cách sử dụng lý thuyết nút để tính toán mức độ khó khăn



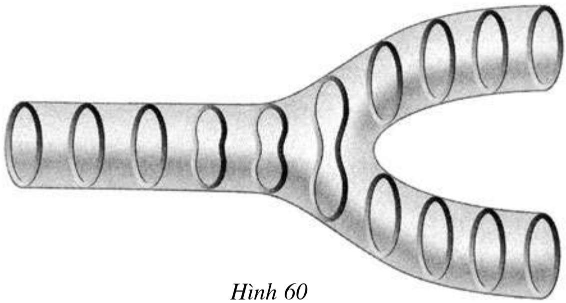
Hình 59

trong việc tháo gỡ nút ADN, các nhà nghiên cứu có thể tìm hiểu các tính chất của những enzyme thực hiện việc tháo gỡ nút đó. Còn tốt hơn nữa là bằng cách sử dụng các kỹ thuật hiển thị bằng thực nghiệm như kính hiển vi điện tử và điện chuyển gel, các nhà khoa học đã có thể thực sự quan sát và định lượng được sự thay đổi trong thắt nút và liên kết của ADN tạo bởi các enzyme (H.59 cho thấy một bức ảnh hiển vi điện tử của một nút thắt của ADN). Thách thức đối với các nhà toán học khi này là suy ra cơ chế vận hành của các enzyme từ những thay đổi quan sát được trong tôpô của ADN. Như là một sản phẩm phụ, sự thay đổi số lần bắt chéo nhau trong nút ADN giúp các nhà sinh học đo được *tốc độ phản ứng* của các enzyme - một enzyme có nồng độ đã cho có thể ảnh hưởng đến bao nhiêu chỗ bắt chéo nhau trong một phút.

Song sinh học phân tử không phải là lĩnh vực duy nhất mà lý thuyết nút có những ứng dụng không lường trước. Lý thuyết dây - nỗ lực hiện nay nhằm xây dựng một lý thuyết thống nhất giải thích được tất cả các lực trong tự nhiên - cũng có liên quan đến các nút.

Vũ trụ nằm trên một sợi dây?

Hấp dẫn là một lực hoạt động ở thang lớn nhất. Nó giữ cho các ngôi sao trong các thiên hà cụm lại với nhau và ảnh hưởng đến sự giãn nở của vũ trụ. Thuyết tương đối rộng của Einstein là một lý thuyết quan trọng về hấp dẫn. Ở sâu bên trong các hạt nhân nguyên tử, các lực khác và một lý thuyết khác giữ vai trò thống trị tối thượng. Lực hạt nhân mạnh liên kết các hạt có tên là *quark* tạo nên các prôton và notron quen thuộc, những thành phần cơ bản của vật chất. Hành vi của các hạt và các lực trong thế giới hạ nguyên tử được chi phối bởi các định luật của cơ học lượng tử. Vậy liệu quark và các thiên hà có chơi theo cùng một luật hay không? Các nhà vật lý thì tin rằng chúng phải như vậy, mặc dù họ còn chưa biết là tại sao. Trong nhiều thập kỷ, các nhà vật lý đã nỗ lực tìm kiếm một "lý thuyết của vạn vật" - một sự mô tả bao quát được các quy luật của tự nhiên. Đặc biệt, họ muốn bắc một cầu nối qua khoảng trống giữa những cái vô cùng lớn và những cái vô cùng bé bằng lý thuyết lượng tử của hấp dẫn - một sự dung hòa giữa thuyết tương đối rộng và cơ học lượng tử. Lý thuyết dây dường như là sự đánh cược tốt nhất hiện nay cho một lý thuyết như vậy của vạn vật. Nguyên được phát triển và bị vùi dập như là một lý thuyết về lực hạt nhân, lý thuyết dây đã hồi sinh từ bóng tối vào



Hình 60

năm 1974 bởi nhà vật lý John Schwarz và Joel Scherk. Ý tưởng cơ bản của thuyết dây hết sức đơn giản. Lý thuyết này chủ trương rằng các hạt cơ bản hạ nguyên tử, như electron và quark, không phải là các thực thể có dạng điểm, không có cấu trúc. Mà thực ra, các hạt cơ bản biểu diễn các mode dao động khác nhau của cùng một dây cơ bản. Theo các ý tưởng này, vũ trụ được choán đầy bởi những vòng dây đàn hồi, giống như một dây cao su bé xíu. Giống như khi một dây đàn violon được gảy lên sẽ tạo ra những hòa âm khác nhau thì những dao động khác nhau của các vòng dây kín này sẽ tương ứng với các hạt vật chất khác nhau. Nói cách khác, thế giới là cái gì đó tựa như một bản giao hưởng vậy.

Vì các dây là những vòng kín di chuyển qua không gian, nên theo thời gian, chúng quét nên các mặt (gọi là *mặt vũ trụ*) có dạng là một mặt trụ (như trên H.60). Nếu một dây phát ra các dây khác, thì mặt trụ này sẽ phân nhánh tạo thành các cấu trúc có dạng xương đòn. Khi nhiều dây tương tác với nhau, chúng tạo nên một mạng phức tạp các vỏ giống như hình chiếc xăm ôtô hợp lại với nhau. Trong khi nghiên cứu các loại cấu trúc tôpô phức tạp này, hai nhà lý thuyết dây là Hirosi Ooguri và Cumrun Vafa đã khám phá ra mối liên kết thú vị giữa số các vỏ hình chiếc xăm ôtô, các tính chất hình học nội tại của các nút, và đa thức Jones. Thậm chí trước đó, Ed Witten - một trong những nhân vật chủ chốt trong lý thuyết dây - đã tạo nên một mối quan hệ không hề ngờ tới giữa đa thức Jones và chính nền tảng của lý thuyết dây (mà thường được gọi là *thuyết trường lượng tử*). Mô hình của Witten sau này đã được tư duy lại từ quan điểm toán học thuần túy bởi nhà toán học Michael Atiyah. Vì vậy lý thuyết dây và lý thuyết nút đã chung sống cộng sinh một cách tuyệt vời. Một mặt, lý thuyết dây hưởng lợi từ các kết quả của lý thuyết nút; mặt khác, lý thuyết dây thực sự dẫn đến những hiểu biết mới trong lý thuyết nút.

Với phạm vi đã được mở rộng thêm nhiều, lý thuyết dây tìm kiếm những lý giải cho các thành phần cơ bản nhất cấu tạo nên vật chất, rất giống với cách thức mà Thomson trước đó tìm kiếm một lý thuyết về nguyên tử. Thomson đã quan niệm (một cách sai lầm) rằng các nút có thể cung cấp cho ông câu trả lời. Bằng một bước ngoặt bất ngờ, các nhà lý thuyết dây phát hiện ra rằng các nút thực sự có thể cung cấp chí ít là một số câu trả lời. Câu chuyện về lý thuyết nút đã minh họa một cách đẹp đẽ cho sức mạnh không ngờ tới của toán học. Như tôi đã nhắc tới ở trên, thậm chí chỉ riêng mặt "chủ động" của tính hiệu quả của toán học không thôi - khi mà các nhà khoa học tạo ra toán học mà họ cần đến để mô tả khoa học quan sát được - cũng đã cho thấy một số điều ngạc nhiên kỳ lạ khi liên quan tới độ chính xác. Tôi sẽ mô tả một cách ngắn ngọn một chủ đề trong vật lý học mà ở đó cả khía cạnh chủ động cũng như thụ động đều đóng vai trò quan trọng, nhưng đặc biệt đáng kể là bởi vì độ chính xác có được.

Một độ chính xác nặng ký

Newton lấy những quy luật của các vật rơi được khám phá bởi Galileo và các nhà thực nghiệm Italia khác, kết hợp chúng với ba định luật chuyển động của các hành tinh được thiết lập bởi Kepler, và đã sử dụng sơ đồ thống nhất này để đưa ra một định luật toán học phổ quát về hấp dẫn. Trên con đường đó, Newton đã phải tạo ra một lĩnh vực hoàn toàn mới của toán học - phép tính vi tích phân - cho phép ông nắm bắt được một cách súc tích và mạch lạc tất cả những tính chất của các định luật mà ông đề xuất về chuyển động và hấp dẫn. Độ chính xác mà bản thân Newton xác minh định luật của mình về hấp dẫn, từ các kết quả từ quan sát và thí nghiệm vào thời ông, là không quá 4%. Song định luật này được chứng minh là chính xác vượt quá cả những mong đợi hợp lý. Đến những năm 1950, độ chính xác thực nghiệm đã tốt hơn một phần mười ngàn %. Nhưng đó còn chưa phải là tất cả. Gần đây hơn, một số lý thuyết có tính tư biện, nhằm giải thích thực tế là sự giãn nở của vũ trụ dường như đang tăng tốc, đã cho rằng lực hấp dẫn có thể thay đổi hành vi của nó ở những thang khoảng cách rất nhỏ. Theo định luật của Newton, lực hấp dẫn giảm tỷ lệ nghịch với bình phương khoảng cách. Tức là, nếu bạn tăng gấp đôi khoảng cách giữa hai khối lượng, thì lực hấp dẫn mà mỗi khối lượng phải chịu yếu đi bốn lần. Các kịch bản mới tiên đoán sẽ có sự sai lệch so với phát biểu của Newton ở những khoảng cách nhỏ hơn một milimét. Eric Adelberger, Daniel Kapner và các cộng sự của họ ở Đại học Washington, Seatle, đã tiến hành một loạt những thí nghiệm tài tình để kiểm tra sự thay đổi quy luật phụ thuộc vào khoảng cách đã được tiên đoán này. Kết quả gần đây nhất của họ, được công bố vào tháng 1 năm 2007, cho thấy định luật nghịch đảo-bình phương vẫn còn đúng cho tới khoảng cách năm mươi sáu phần ngàn mm! Như vậy, một định luật toán học được đề xuất hơn 300 năm trước, dựa trên những quan sát rất nghèo nàn, không chỉ hóa ra là chính xác một cách đáng kinh ngạc, mà còn được chứng minh là vẫn đúng trong một phạm vi thậm chí không thể thăm dò được được cho đến tận rất gần đây.

Có một câu hỏi quan trọng mà Newton hoàn toàn không trả lời được: lực hấp dẫn thực sự đã vận hành như thế nào? Làm thế nào mà Trái đất, ở cách xa Mặt trăng tới 1/4 triệu dặm, lại có thể ảnh hưởng đến chuyển động của Mặt trăng? Newton đã ý thức được khiếm khuyết đó trong lý thuyết của mình và ông đã công khai thừa nhận nó trong cuốn *Principia*:

> Cho đến đây, chúng ta đã giải thích được các hiện tượng trên trời và dưới biển bằng sức mạnh của lực hấp dẫn, nhưng vẫn chưa tìm ra được nguyên nhân của sức mạnh này. Điều chắc chắn là, nó phải phát sinh từ một nguyên nhân xâm nhập tới tận trung tâm của Mặt trời và các hành tinh... và truyền lực của nó đi mọi phía tới những khoảng cách khổng lồ, và luôn giảm theo quy luật tỷ lệ nghịch với bình phương khoảng cách... Song cho đến nay, tôi vẫn chưa thể khám phá ra được nguyên nhân của các tính chất này của hấp dẫn từ các hiện tượng và tôi cũng không có giả thuyết nào.

Người quyết định chấp nhận thách thức mà Newton còn bỏ lại là Albert Einstein (1879-1955). Đặc biệt là vào năm 1907, Einstein đã có một lý do rất mạnh mẽ để quan tâm đến hấp dẫn - lý thuyết mới của ông, tức *thuyết tương đối hẹp,* dường như mâu thuẫn trực tiếp với định luật vạn vật hấp dẫn của Newton.

Newton tin rằng tác dụng của lực hấp dẫn là tức thời. Ông cho rằng các hành tinh không hề mất một chút thời gian nào để cảm nhận được lực hấp dẫn của Mặt trời, hay quả táo cảm nhận được lực hấp dẫn của Trái đất. Mặt khác, cột trụ trung tâm của thuyết tương đối hẹp của Einstein là phát biểu rằng: không một đối tượng, năng lượng, hay thông tin nào có thể di chuyển nhanh hơn tốc độ ánh sáng. Vậy thì làm sao lực hấp dẫn lại có thể hoạt động một cách tức thời được? Như ví dụ dưới đây cho thấy, những hệ quả của mâu thuẫn này có thể là thảm họa đối với các khái niệm cơ bản như nhận thức của chúng ta về nguyên nhân và kết quả.

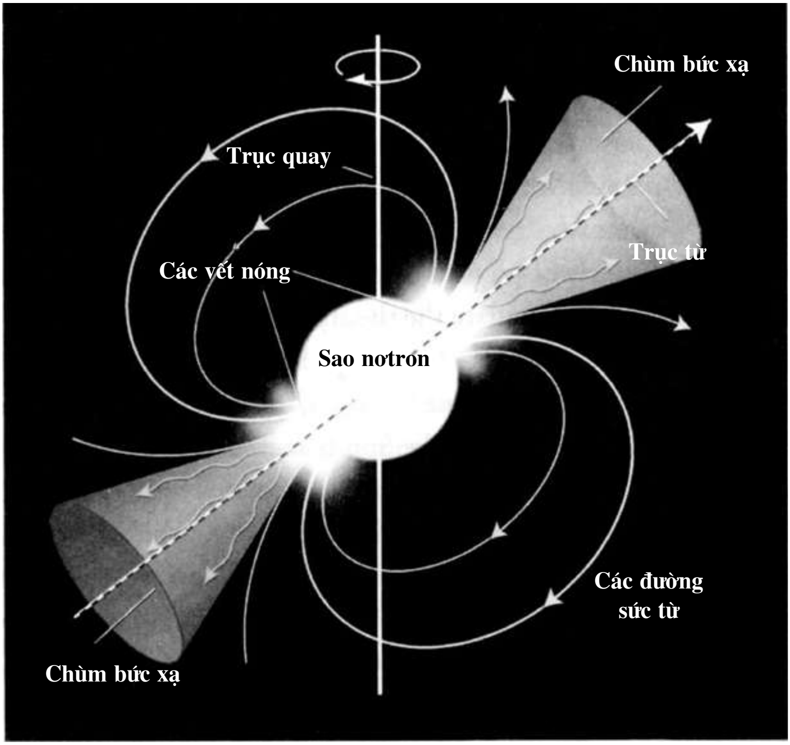
Hãy thử hình dung rằng, bằng cách nào đó, Mặt trời đột nhiên biến mất. Bị mất đi lực vẫn giữ cho nó ở trên quỹ đạo của mình, Trái đất (theo Newton) sẽ ngay lập tức bắt đầu chuyển động theo một đường thẳng (ngoài độ lệch nhỏ gây ra bởi lực hấp dẫn của các hành tinh khác). Tuy nhiên, Mặt trời sẽ chỉ biến mất khỏi tầm mắt của các cư dân trên Trái đất chỉ sau đó khoảng 8 phút, vì đó là thời gian ánh sáng đi hết khoảng cách từ Mặt trời đến Trái đất. Nói cách khác, nếu theo Newton thì sự thay đổi trong chuyển động của Trái đất sẽ diễn ra trước khi Mặt trời biến mất.

Để loại bỏ mâu thuẫn này, và đồng thời giải quyết câu hỏi chưa được trả lời của Newton, với một tâm trạng đầy ám ảnh, Einstein đã dấn thân tìm kiếm một lý thuyết hấp dẫn mới. Đó là một nhiệm vụ kỳ vĩ. Bất kỳ một lý thuyết mới nào không chỉ phải giữ lại được tất cả những thành công to lớn của lý thuyết Newton mà còn phải lý giải được lực hấp dẫn hoạt động như thế nào, và phải làm điều đó theo một cách tương thích với thuyết tương đối hẹp. Sau nhiều sự khởi đầu sai lầm và lang thang rất lâu trong những ngõ cụt, cuối cùng Einstein đã đạt được mục đích của mình vào năm 1915. *Thuyết tương đối rộng* của ông hiện vẫn còn được nhiều người xem như là một trong những lý thuyết đẹp nhất mà con người từng tạo ra.

Tâm điểm của cái nhìn sâu sắc mang tính đột phá của Einstein nằm ở ý tưởng cho rằng hấp dẫn không là gì khác hơn là sự uốn cong trong cấu trúc của không gian và thời gian. Theo Einstein, giống như những quả bóng *golf* được dẫn dắt bởi những chỗ uốn cong của thảm cỏ uốn lượn, các hành tinh cũng đi theo những đường cong trong không gian bị uốn cong biểu diễn hấp dẫn của Mặt trời. Nói cách khác, khi không có vật chất hay các dạng khác của năng lượng, *không thời gian* (cấu trúc thống nhất của ba chiều không gian và một chiều thời gian) sẽ là phẳng. Vật chất và năng lượng sẽ làm cong không thời gian giống như một quả bóng bowling nặng làm cho một tấm cao su căng bị võng xuống. Các hành tinh sẽ đi theo những con đường ngắn nhất trong hình học cong này, một hình học là sự biểu hiện của hấp dẫn. Bằng cách giải được bài toán "vận hành như thế nào" của hấp dẫn, Einstein cũng đồng thời cung cấp một khuôn khổ cho việc giải đáp câu hỏi nó truyền đi nhanh như thế nào. Câu hỏi sau được quy về việc xác định sự uốn cong trong không thời gian có thể di chuyển nhanh như thế nào. Điều này khá giống với việc tính toán tốc độ của các gợn sóng trên mặt hồ. Trong thuyết tương đối rộng, Einstein đã chứng tỏ được rằng hấp dẫn di chuyển đúng bằng tốc độ ánh sáng, và điều này loại bỏ được sự không nhất quán đã tồn tại giữa lý thuyết của Newton và thuyết tương đối hẹp. Nếu Mặt trời biến mất, sự thay đổi quỹ đạo của Trái đất sẽ xuất hiện sau đó 8 phút, trùng khớp với việc chúng ta nhìn thấy sự biến mất của Mặt trời.

Việc Einstein đã biến không thời gian cong bốn chiều thành hòn đá tảng cho lý thuyết mới của mình về vũ trụ có nghĩa là ông thực sự cần đến một lý thuyết toán học cho các đối tượng hình học đó. Trong sự tuyệt vọng, ông đã tâm sự với người bạn học cũ, nhà toán học Marcel Grossmann (1878-1936): "Mình đã thấm nhuần tầm quan trọng vĩ đại của toán học, những phần tinh tế hơn của những điều mà trước đây mình vẫn coi là hoàn toàn xa xỉ". Grossmann đã chỉ ra rằng hình học phi Euclid của Riemann (được mô tả trong Chương 6) chính là công cụ mà Einstein cần - đó là hình học của các không gian cong với số chiều bất kỳ. Đây là một minh họa không thể tưởng tượng nổi cho cái mà tôi gọi là tính hiệu quả "thụ động" của toán học, điều mà Einstein đã nhanh chóng thừa nhận: "Thực tế, chúng ta có thể xem [hình học] như là một nhánh cổ nhất của vật lý học," ông tuyên bố. "Không có nó tôi sẽ không thể nào xây dựng được thuyết tương đối".

Thuyết tương đối rộng cũng đã được kiểm chứng với sự chính xác đầy ấn tượng. Những kiểm chứng này không dễ dàng thực hiện, vì độ cong của không thời gian được tạo ra bởi các đối tượng như Mặt trời, chỉ cỡ vài phần triệu. Trong khi những kiểm chứng ban đầu đều liên quan đến những quan sát trong hệ Mặt trời (ví dụ như những thay đổi nhỏ trong quỹ đạo của Thủy tinh, khi so sánh với những tiên đoán trong lý thuyết hấp dẫn của Newton), thì những kiểm chứng kỳ lạ hơn gần đây đã trở nên khả thi.



Hình 61

Một trong những xác nhận tốt nhất là sử dụng một đối tượng thiên văn học có tên là *pulsar kép*.

Pulsar là một ngôi sao nén chặt một cách khác thường và phát ra sóng vô tuyến, với khối lượng lớn hơn đôi chút khối lượng của Mặt trời nhưng bán kính thì chỉ khoảng 6 dặm. Mật độ của một sao như vậy (còn thường được gọi là *sao nơtron*) cao đến mức mà vật chất của nó chứa trong một khối lập phương mỗi cạnh 1 insơ nặng tới khoảng một tỷ tấn. Nhiều sao nơtron quay rất nhanh, đồng thời phát ra sóng vô tuyến từ các cực từ của nó. Khi trục từ hơi nghiêng so với trục quay (như trên H. 61), chùm sóng vô tuyến từ một cực đã cho có thể cắt ngang qua đường nhìn của chúng ta chỉ một lần trong mỗi vòng quay, giống như sự lóe lên của ánh sáng từ một ngọn hải đăng. Trong trường hợp này, sự phát ra sóng vô tuyến dường bị xung động (pulsed) - từ đó mà nó có tên là "pulsar". Trong trường hợp hai pulsar quay quanh khối tâm chung theo một quỹ đạo kín, thì tạo nên một hệ pulsar kép.

Có hai tính chất khiến pulsar kép trở thành phòng thí nghiệm tuyệt vời để kiểm chứng thuyết tương đối rộng: (1) Các pulsar vô tuyến là những đồng hồ tuyệt vời - tốc độ quay của chúng ổn định đến mức mà trong thực tế, chúng còn vượt hơn cả đồng hồ nguyên tử về độ chính xác; và (2) Các pulsar bị nén chặt đến mức mà trường hấp dẫn của chúng rất mạnh, tạo ra những hiệu ứng tương đối tính rất đáng kể. Những đặc điểm này cho phép các nhà thiên văn học đo được một cách rất chính xác những thay đổi về thời gian di chuyển của ánh sáng từ các pulsar đến Trái đất gây ra bởi chuyển động quay của hai pulsar trong trường hấp dẫn của nhau.

Kiểm chứng gần đây nhất là kết quả của những quan sát định thời chính xác tiến hành trong khoảng thời gian hai năm rưỡi đối với hệ pulsar kép tên là PSR J0737-3039A/B ("số điện thoại" dài này biểu thị tọa độ của hệ trên bầu trời). Hai pulsar trong hệ này quay trọn một vòng theo quỹ đạo của chúng chỉ trong hai giờ hai mươi phút đồng hồ, và hệ này cách Trái đất khoảng 2000 năm ánh sáng (một năm ánh sáng là khoảng cách mà ánh sáng đi được trong một năm trong môi trường chân không; tức là khoảng 6 ngàn tỷ dặm). Một nhóm các nhà thiên văn dẫn đầu là Michael Kramer của

Đại học Manchester đã đo được các hiệu chỉnh tương đối tính so với chuyển động theo Newton. Kết quả, được công bố vào tháng 10 năm 2006, hoàn toàn phù hợp với giá trị được tiên đoán bởi thuyết tương đối rộng với sai số khoảng 0,05%!

Thật tình cờ, cả thuyết tương đối rộng lẫn thuyết tương đối hẹp đều đóng vai trò quan trọng trong *Hệ định vị toàn cầu (GPS)* giúp chúng ta nhanh chóng tìm được vị trí của mình trên bề mặt Trái đất và đường đi từ vị trí này đến vị trí khác, dù là đi ôtô, máy bay hay đi bộ. GPS xác định vị trí hiện tại của máy thu bằng cách đo thời gian tín hiệu đi từ một số vệ tinh đến nó và bằng phương pháp tam giác đạc (giải tam giác) dựa vào vị trí của mỗi vệ tinh đó. Thuyết tương đối hẹp tiên đoán rằng đồng hồ nguyên tử trên các vệ tinh chạy chậm hơn (vào khoảng một vài phần triệu giây mỗi ngày) so với trên mặt đất vì chuyển động tương đối của chúng. Đồng thời, thuyết tương đối rộng lại tiên đoán rằng đồng hồ vệ tinh chạy nhanh hơn (khoảng vài chục phần triệu giây mỗi ngày) so với trên mặt đất vì thực tế là ở trên cao bề mặt của Trái đất, độ cong trong không thời gian gây ra bởi khối lượng của Trái đất là nhỏ hơn. Nếu không làm những bổ chính cần thiết cho hai hiệu ứng quan trọng này, thì những sai số trong định vị toàn cầu có thể tích tụ với tốc độ hơn 5 dặm mỗi ngày.

Lý thuyết hấp dẫn chỉ là một trong nhiều ví dụ minh họa sự tương thích một cách kỳ diệu và độ chính xác đáng kinh ngạc của sự phát biểu toán học các định luật của tự nhiên. Trong trường hợp này, cũng như trong rất nhiều trường hợp khác, cái mà chúng ta nhận được từ các phương trình nhiều hơn rất nhiều so với những cái mà chúng ta ban đầu đặt vào chúng. Độ chính xác của các lý thuyết của

Newton và Einstein đã chứng minh độ chính xác vượt quá xa của những quan sát mà các lý thuyết này ban đầu cố gắng giải thích.

Có lẽ ví dụ tốt nhất về độ chính xác đáng kinh ngạc mà một lý thuyết toán học có thể đạt được, đó là *điện động lực học lượng tử (QED)*, lý thuyết mô tả tất cả các hiện tượng có liên quan đến các hạt tích điện và ánh sáng. Năm 2006, một nhóm các nhà vật lý thuộc Đại học Harvard đã xác định mômen từ của electron (đại lượng cho biết electron tương tác với từ trường mạnh yếu như thế nào) chính xác đến 8 phần ngàn tỷ. Đây là một chiến công phi thường về mặt thực nghiệm. Song bạn có thể bổ sung thêm thực tế rằng hầu hết những tính toán lý thuyết gần đây nhất dựa trên QED đều đạt được độ chính xác tương tự và rằng hai kết quả phù hợp nhau với độ chính xác trở nên gần như không thể tin nổi. Khi nghe về QED vẫn tiếp trục thành công, một trong những nhà sáng lập QED, nhà vật lý Freeman Dyson, đã phải thốt lên: "Tôi thực sự sửng sốt trước thực tế là Tự nhiên lại nhảy một cách cực kỳ chính xác theo đúng cái giai điệu mà chúng tôi đã viết một cách vội vàng 57 năm trước, và trước việc các nhà thực nghiệm và lý thuyết lại có thể đo đạc và tính toán được chính xác vũ điệu của Tự nhiên đến một phần ngàn tỷ".

Nhưng độ chính xác không phải là lý do duy nhất mang lại tiếng tăm cho các lý thuyết toán học, một lý do nữa là sức mạnh tiên đoán của chúng. Tôi sẽ chỉ đưa ra hai ví dụ, một từ thế kỷ 19 và một từ thế kỷ 20 để minh họa cho sức mạnh này. Lý thuyết thứ nhất tiên đoán một hiện tượng mới và lý thuyết thứ hai tiên đoán sự tồn tại của các hạt cơ bản mới.

James Clerk Maxwell, người xây dựng lý thuyết điện từ cổ điển, đã chứng tỏ vào năm 1864 rằng lý thuyết này tiên đoán các điện trường hoặc từ trường biến thiên sẽ sinh ra các sóng lan truyền. Các sóng này - tức các sóng điện từ quen thuộc (ví dụ như sóng vô tuyến) - lần đầu tiên đã được dò thấy bởi nhà vật lý người Đức Heinrich Hertz (1857-94) trong một loạt những thí nghiệm được thực hiện vào cuối những năm 1880.

Vào cuối những năm 1960, các nhà vật lý Steven Weinberg, Sheldon Glashow, và Abdus Salam đã phát triển một lý thuyết để xử lý lực điện từ và lực hạt nhân yếu theo một cách thống nhất. Lý thuyết này, ngay nay gọi là *lý thuyết điện yếu*, tiên đoán sự tồn tại của ba hạt (gọi là W^+, W^- và boson Z) mà trước đấy chưa bao giờ được quan sát thấy. Các hạt này đã được phát hiện một cách rõ ràng vào năm 1983 trong các thí nghiệm trên máy gia tốc (tức là va chạm một hạt dưới nguyên tử vào một hạt khác ở năng lượng cực cao) do hai nhà vật lý Carlo Rubbia và Simon van der Meer lãnh đạo.

Nhà vật lý Eugene Wigner, người đã đặt ra cụm từ "tính hiệu quả đến phi lý của toán học", đã đề xuất gọi tất cả những thành công ngoài mong đợi của các lý thuyết toán học là "định luật kinh nghiệm của nhận thức luận" (nhận thức luận là lĩnh vực nghiên cứu nguồn gốc và những giới hạn của tri thức). Nếu "định luật" này không đúng, ông lý luận, thì các nhà khoa học sẽ thiếu đi sự khích lệ và sự đảm bảo vốn là những thứ tuyệt đối cần thiết cho sự khám phá thấu đáo về các định luật của tự nhiên. Tuy nhiên, Wigner không đưa ra bất kỳ sự giải thích nào cho định luật kinh nghiệm này của nhận thức luận. Thay vào đó, ông xem nó như là một "món quà tuyệt vời" mà chúng ta nên biết ơn thậm chí mặc dù không hiểu được nguồn gốc của nó. Thực vậy, đối với Wigner, "món quà" này đã nắm bắt được cái cốt yếu của câu hỏi về tính hiệu quả đến phi lý của toán học.

Đến đây, tôi tin rằng chúng ta đã tập hợp đủ các đầu mối để ít nhất cũng có thể thử trả lời những câu hỏi mà chúng ta đã đặt ra từ đầu: Tại sao toán học lại hiệu quả và rất hữu ích trong việc giải thích thế giới xung quanh chúng ta đến mức thậm chí còn tạo nên những tri thức mới? Và toán học xét cho cùng là được phát minh hay khám phá?

CHƯƠNG 9

VỀ TRÍ TUỆ CON NGƯỜI, TOÁN HỌC VÀ VŨ TRỤ

Có hai câu hỏi liên quan với nhau theo những cách rất phức tạp, đó là: (1) Toán học có tồn tại độc lập với trí óc con người không? và (2) Tại sao các khái niệm toán học lại có khả năng ứng dụng vượt ra ngoài bối cảnh mà trong đó chúng được hình thành lúc ban đầu? Tuy nhiên, để việc bàn luận được đơn giản, tôi sẽ thử trình bày chúng theo một cách tuần tự.

Trước hết, bạn có thể băn khoăn tự hỏi các nhà toán học thời hiện đại đang đứng ở đâu trước câu hỏi: toán học là sự khám phá hay phát minh. Dưới đây là những gì mà nhà toán học Philip Davis và Reuben Hersh đã mô tả tình huống đó trong cuốn sách tuyệt vời của họ *Trải nghiệm toán học*.

> Hầu hết các nhà văn viết về chủ đề này dường như đều nhất trí rằng nhà toán học điển hình là một người theo chủ nghĩa Platon [tức là xem toán học là sự khám phá] vào các ngày trong tuần và là một nhà hình thức [xem toán học là sự phát minh] vào những ngày chủ nhật. Tức là, khi anh ta đang làm toán, thì anh ta tin rằng mình đang làm việc với một thực tại khách quan mà anh ta lao tâm khổ tứ xác định các tính chất của nó. Nhưng sau đó, khi đối mặt với thách thức phải đưa ra một sự giải thích triết học về thực tại đó thì anh ta cảm thấy dễ dàng nhất là giả vờ không tin vào nó một chút nào.

Ngoài sự liều lĩnh thay thế từ "anh ta hoặc cô ta" thành "anh ta" ở mọi chỗ, để phản ánh nhân khẩu học trong toán học đang thay đổi, tôi có ấn tượng rằng sự mô tả này sẽ tiếp tục đúng với nhiều nhà toán học và vật lý lý thuyết ngày hôm nay. Tuy nhiên, một số nhà toán học thế kỷ 20 đã có một quan điểm rạch ròi đứng về phía này hay phía khác. Dưới đây là quan điểm Platonic của G. H. Hardy trong cuốn *Lời biện minh của một nhà toán học*:

> Với tôi, và tôi cho là với hầu hết các nhà toán học cũng vậy, có một thực tại khác mà tôi sẽ gọi là "thực tại toán học"; và trong số các nhà toán học hay triết học không có một loại nhất trí nào về bản chất của thực tại toán học. Một số khẳng định rằng nó "thuộc về tinh thần" và theo một nghĩa nào đó thì chúng ta tạo dựng nên nó; số khác lại cho khẳng định rằng nó ở bên ngoài và độc lập với chúng ta. Ai đó có thể lý giải một cách thuyết phục về

> thực tại toán học hẳn sẽ giải quyết được rất nhiều vấn đề khó khăn nhất của siêu hình học. Nếu anh ta có thể bao hàm được cả thực tại vật lý trong lý giải của mình, thì anh ta sẽ giải quyết được tất cả.
>
> Thực ra tôi không mong muốn tranh cãi bất kỳ câu hỏi nào như vậy ở đây ngay cả khi tôi có đủ khả năng để làm điều đó, nhưng tôi sẽ phát biểu quan điểm riêng của tôi một cách võ đoán để tránh bất kỳ sự hiểu lầm nào dù là nhỏ. Tôi tin rằng thực tại toán học nằm ngoài chúng ta, rằng chức năng của chúng ta là khám phá ra hay *quan sát* nó, và rằng các định lý mà chúng ta chứng minh, và những thứ mà chúng ta mô tả một cách hùng hồn như là "những sáng tạo" của mình, đơn giản chỉ là sự ghi lại những gì chúng ta quan sát được. Quan điểm này cũng được khẳng định, dưới dạng này hay khác, bởi nhiều nhà triết học danh tiếng kể từ sau Plato, và tôi sẽ sử dụng thứ ngôn ngữ tự nhiên với người giữ quan điểm đó.

Hai nhà toán học Edward Kasner (1878-1955) và James Newman (1907-66) đã diễn đạt chính xác quan điểm ngược lại trong cuốn *Toán học và trí tưởng tượng*:

> Toán học được hưởng một uy danh mà không một sự bay bổng nào khác của tư duy có mục đích sánh được là điều không có gì đáng ngạc nhiên. Nó có thể tạo ra nhiều tiến bộ trong khoa học, và đồng thời trở nên không thể thiếu được trong những vấn đề thực tiễn và dễ dàng là kiệt tác của sự trừu tượng hóa thuần túy tới mức sự thừa nhận về

tính siêu việt của nó trong số những thành tựu trí tuệ của loài người là điều mà nó xứng đáng được hưởng.

Mặc dù tính siêu việt đó, nhưng sự tán thưởng đáng kể đầu tiên của toán học mới chỉ có được gần đây với sự ra đời của hình học phi Euclid bốn chiều. Nói như thế không có nghĩa là đánh giá thấp những tiến bộ trong giải tích, lý thuyết xác suất, số học, tôpô và các lĩnh vực khác của toán học mà chúng ta đã bàn luận ở trên. Mỗi một lĩnh vực đó đều mở rộng toán học và làm sâu sắc thêm ý nghĩa của nó cũng như đã mở rộng và làm sâu sắc thêm sự hiểu biết của chúng ta về vũ trụ vật lý. Song không có lĩnh vực nào đóng góp cho nội quan toán học, cho tri thức về mối quan hệ giữa các bộ phận của toán học với nhau và với toàn bộ nhiều như là những dị giáo phi Euclid này.

Như là một kết quả của tinh thần phê phán quả cảm làm nảy sinh những dị giáo, chúng ta đã vượt qua được quan niệm cho rằng các chân lý toán học tồn tại độc lập và tách rời với trí óc của chúng ta. Thậm chí chúng ta còn cảm thấy lạ lùng là tại sao một quan niệm như vậy lại có thể đã từng tồn tại. Nhưng, đó chính là điều mà Pythagoras đã nghĩ và cả Descartes, cùng với hàng trăm nhà toán học vĩ đại khác trước thế kỷ 19. Ngày nay, toán học là không có gì ràng buộc; nó đã phá bỏ mọi xiềng xích của mình. Cho dù bản chất của nó là gì đi nữa, thì chúng ta đều thừa nhận rằng nó tự do như trí óc, và tham lam như trí tưởng tượng. Hình học phi Euclid là bằng chứng cho thấy toán học, không giống như âm nhạc của các thiên cầu, nó là tác phẩm thủ công của riêng con người, chỉ chịu những hạn chế được áp đặt bởi các luật của tư duy.

Vì vậy, trái ngược với tính chính xác và xác định vốn là dấu hiệu tiêu chuẩn của các phát biểu trong toán học, ở đây chúng ta lại có sự không nhất trí về quan điểm, thường tiêu biểu hơn cho những tranh cãi trong triết học và chính trị. Chúng ta có nên ngạc nhiên về chuyện này không? Thực sự là không. Bởi lẽ câu hỏi toán học được phát minh hay khám phá thực sự không phải là một câu hỏi của toán học.

Khái niệm "khám phá" hàm ý sự tồn tại từ trước trong một thế giới nào đó, hoặc là thế giới thực hoặc là thế giới siêu hình. Còn khái niệm "phát minh" thì liên quan đến trí tuệ con người, hoặc là cá nhân hoặc là tập thể. Vì vậy, câu hỏi đó thuộc về tổ hợp các lĩnh vực có thể liên quan đến vật lý học, triết học, toán học, khoa học nhận thức, thậm chí nhân chủng học, song nó chắc chắn không phải thuộc riêng về toán học (ít nhất là không trực tiếp). Do đó, các nhà toán học có thể thậm chí không được trang bị tốt nhất để trả lời câu hỏi này. Xét cho cùng thì, các nhà thơ, vốn là những người có thể thực hiện đủ trò ảo thuật với ngôn ngữ, nhưng họ không nhất thiết phải là những nhà ngôn ngữ giỏi nhất; và những nhà triết học vĩ đại nhất nhìn chung cũng không phải là chuyên gia về các chức năng của não. Câu trả lời cho câu hỏi "khám phá hay phát minh" vì vậy chỉ có thể thu được (nếu có) từ sự khảo sát thận trọng mọi đầu mối, đúc rút từ nhiều lĩnh vực rất rộng lớn.

Siêu hình học,
Vật lý học và nhận thức

Những người tin rằng toán học tồn tại trong một thế giới độc lập với con người lại chia làm hai phe khác nhau khi phải xác định bản chất của thế giới đó. Thứ nhất, là những nhà Platonic thực thụ, mà đối với họ toán học ngụ trong một thế giới vĩnh cửu, trừu tượng của những dạng toán học. Thứ hai, là những người cho rằng các cấu trúc toán học thực tế là một bộ phận có thực của thế giới tự nhiên. Vì chúng tôi đã thảo luận về chủ nghĩa Plato thuần túy và một số hạn chế có tính triết học của nó một cách kỹ lưỡng, nên tôi sẽ nói chi tiết hơn về quan điểm thứ hai.

Người đưa ra cái có thể coi là một phiên bản cực đoan và tư biện nhất của kịch bản "toán học là một bộ phận của thế giới tự nhiên" là một đồng nghiệp của tôi, nhà vật lý thiên văn Max Tegmark của MIT.

Tegmark lý luận rằng "vũ trụ của chúng ta không chỉ được mô tả bằng toán học - mà nó *là* toán học" [nhấn mạnh của tác giả]. Lập luận của ông bắt đầu với một giả thuyết dễ nhất trí cho rằng có một thực tại vật lý bên ngoài tồn tại độc lập với con người. Sau đó ông tiếp tục khảo sát cái có thể là bản chất của lý thuyết tối hậu về một thực tại như vậy (mà các nhà vật lý gọi là "lý thuyết của vạn vật"). Vì thế giới vật lý này hoàn toàn độc lập với con người, Tegmark khẳng định, nên sự mô tả nó phải được giải phóng khỏi những "hành trang" của con người (ví dụ, đặc biệt là ngôn ngữ). Nói cách khác, lý thuyết cuối cùng này không thể bao hàm những khái niệm như "hạt dưới nguyên tử", "dây dao động", "không thời gian cong", hoặc những cấu trúc khác do con người nghĩ ra. Từ quan điểm đó, Tegmark kết luận rằng chỉ có một cách mô tả khả dĩ của vũ trụ, đó là sự mô tả chỉ liên quan đến những khái niệm trừu tượng và các mối quan hệ giữa chúng, mà ông lấy là định nghĩa "làm việc" của toán học.

Lập luận của Tegmark về thực tại toán học chắc chắn là hấp dẫn và nếu nó là đúng thì có thể đã tiến một bước dài trong việc giải quyết vấn đề về "tính hiệu quả đến phi lý" của toán học. Trong một thế giới được *xác định* như là toán học, thực tế rằng toán học ăn khớp với tự nhiên giống như một chiếc găng tay sẽ không có gì phải ngạc nhiên. Thật không may là tôi lại không thấy đường hướng suy luận của Tegmark là thực sự hấp dẫn. Bước nhảy từ sự tồn tại của một thực tại bên ngoài (độc lập với trí óc con người) tới kết luận, theo lời Tegmark, "Bạn phải tin vào cái mà tôi gọi là giả thuyết thế giới toán học: rằng thực tại vật lý của chúng ta là một cấu trúc toán học", thì cái bước nhảy ấy, theo quan điểm của tôi, có dính líu với một trò ảo thuật. Khi Tegmark cố gắng để mô tả toán học thực sự là gì, ông nói: "Với một nhà lôgic hiện đại, một cấu trúc toán học chính xác là một tập hợp các thực thể trừu tượng với các mối quan hệ giữa chúng". Nhưng nhà lôgic hiện đại này lại là con người! Nói cách khác, Tegmark chưa bao giờ thực sự *chứng minh* được rằng toán học của chúng ta không phải được phát minh bởi con người, mà ông chỉ đơn giản giả định như thế thôi. Hơn nữa, như nhà sinh học thần kinh Pháp Jean-Pierre Changeux đã chỉ ra để đáp lại một khẳng định tương tự: "Để tuyên bố thực tại vật lý là các đối tượng toán học, ở cấp độ các hiện tượng tự nhiên mà chúng tôi nghiên cứu trong sinh học, thì dường như đối với tôi, nó đặt ra một vấn đề nhận thức luận khá phiền toái. Làm thế nào mà một trạng thái vật lý, ở bên trong bộ não của chúng ta, lại biểu diễn cho một trạng thái vật lý khác ở bên ngoài nó?"

Hầu hết các nỗ lực khác nhằm đặt các đối tượng toán học một cách dứt khoát vào thực tại vật lý bên ngoài đơn giản chỉ dựa vào tính hiệu quả của toán học trong việc giải thích tự nhiên, coi nó như là một bằng chứng. Tuy nhiên, điều này thừa nhận rằng không có một sự giải thích nào khác về tính hiệu quả của toán học là khả dĩ cả, mà quan điểm này, như tôi sẽ chứng tỏ dưới đây, là không đúng.

Nếu toán học không nằm trong thế giới Platonic phi thời gian và phi không gian và cũng không nằm trong thế giới vật lý, thì liệu điều đó có nghĩa là toán học hoàn toàn được phát minh bởi con người hay không? Hoàn toàn không. Thực tế, tôi sẽ chứng tỏ trong phần sau rằng hầu hết toán học đều bao gồm những khám phá. Tuy nhiên, trước khi đi xa hơn, sẽ là hữu ích nếu trước hết chúng ta hãy khảo sát một số quan điểm của các nhà khoa học đương đại về nhận thức. Lý do thật đơn giản - ngay cả nếu toán học hoàn toàn được khám phá thì những khám phá ấy vẫn được thực hiện bởi các nhà toán học là con người sử dụng bộ não của họ.

Với sự tiến triển mạnh mẽ trong khoa học nhận thức những năm gần đây, sẽ là chuyện hoàn toàn tự nhiên để kỳ vọng rằng các nhà sinh học thần kinh và tâm lý học sẽ chuyển sự chú ý của họ sang toán học, đặc biệt là sự tìm kiếm nền tảng của toán học trong nhận thức của con người. Liếc qua các kết luận của hầu hết các nhà khoa học về nhận thức thì ban đầu có thể để lại cho bạn ấn tượng rằng bạn đang chứng kiến sự hiện thân câu nói của Mark Twain “Với một người đang cầm búa thì mọi thứ đều trông như cái đinh”. Với sự tăng giảm đôi chút trong sự nhấn mạnh, về căn bản, tất cả các nhà tâm lý học thần kinh và sinh học đều xác định toán học là sự phát minh của con người. Tuy nhiên, dựa trên những khảo sát kỹ lưỡng hơn, bạn sẽ thấy rằng trong khi sự diễn giải các dữ liệu nhận thức còn xa mới được gọi là rõ ràng thì không có gì đáng ngờ rằng những nỗ lực nhận thức biểu hiện một giai đoạn mới và cách tân trong việc tìm kiếm nền tảng của toán học. Dưới đây là một ví dụ nhỏ nhưng tiêu biểu cho những bình luận của các nhà khoa học về nhận thức.

Nhà thần kinh học người Pháp là Stanislas Dehaene, người có mối quan tâm chủ yếu đến nhận thức số, đã kết luận trong cuốn sách của ông xuất bản vào năm 1997 nhan đề *Cảm giác số* rằng "trực giác về các con số được thả neo rất sâu trong bộ não của chúng ta". Thực tế, quan điểm này rất gần gũi với quan điểm của các nhà trực giác luận, những người muốn đặt nền móng cho toàn bộ toán học dưới dạng thuần túy trực giác về các số tự nhiên. Dehaene lý luận rằng những khám phá về tâm lý học của số học xác nhận rằng "số thuộc 'các đối tượng tự nhiên của tư duy', những phạm trù bẩm sinh mà theo chúng, chúng ta hiểu được thế giới". Đi theo một hướng nghiên cứu riêng biệt được tiến hành với người Mundurukú - một nhóm người Amazon bản xứ sống biệt lập - Dehaene và các cộng sự của mình đã bổ sung vào năm 2006 một đánh giá tương tự về hình học "Sự hiểu biết một cách tự phát những khái niệm hình học và các bản đồ của cộng đồng người ở vùng sâu vùng xa này đã cho ta một bằng chứng xác nhận rằng những kiến thức cốt lõi về hình học, cũng như số học cơ bản, đều là một cấu thành phổ quát của trí óc con người". Không phải mọi nhà khoa học về nhận thức đều nhất trí với kết luận này. Chẳng hạn, một số người chỉ ra rằng, thành công của người Mundurukú trong việc học hình học mới đây, trong đó họ cần phải nhận dạng được một đường cong trong số các đường thẳng, một hình chữ nhật trong số các hình vuông, một elíp trong số các đường tròn, v.v..., có thể chỉ liên quan đến khả năng thị giác của họ biết chỉ ra một thứ khác biệt, chứ không phải là nhờ kiến thức hình học bẩm sinh".

Nhà sinh học thần kinh người Pháp Jean-Pierre Changeux, người đã có một cuộc đối thoại thú vị về bản chất của toán học với nhà toán học "thuộc trường phái Platonic" là Alain Connes trong cuốn *Cuộc nói chuyện về trí tuệ, vật chất và toán học*, đã cung cấp cho ta nhận xét sau đây:

> Cái lập luận rằng các đối tượng toán học không có liên quan gì đến thế giới cảm giác lại có liên quan... tới đặc tính có khả năng sinh sôi của chúng, chúng có thể sinh ra những đối tượng khác. Điều cần nhấn mạnh ở đây là có tồn tại trong bộ não cái mà ta có thể gọi là một "khoang ý thức", một loại không gian vật lý dành cho việc mô phỏng và sáng tạo ra những đối tượng mới... Trong một số phương diện, các đối tượng toán học mới này giống như các cơ thể sống: giống như các cơ thể sống, chúng là những đối tượng vật lý có thể tiến hóa rất nhanh; nhưng không giống với các cơ thể sống, với ngoại lệ đặc biệt là các vi rút, là chúng tiến hóa trong bộ não chúng ta.

Cuối cùng, phát biểu triệt để nhất trong vấn đề phát minh với khám phá đã được đưa ra bởi nhà ngôn ngữ học nhận thức George Lakoff và nhà tâm lý học Rafael Núñez trong cuốn sách phần nào gây tranh cãi *Toán học từ đâu tới*. Như tôi đã nhắc đến trong Chương 1, họ tuyên bố:

> Toán học là một phần tự nhiên của con người. Nó nảy sinh từ cơ thể, bộ não và kinh nghiệm hằng ngày của

> chúng ta trong thế giới này. [Lakoff và Núñez do đó nói rằng toán học xuất hiện từ một "trí tuệ được hiện thân"]... Toán học là một hệ thống các khái niệm của con người sử dụng một cách khác thường các công cụ thông thường của nhận thức con người... Con người chính là chủ thể đã sáng tạo ra toán học, và chúng ta vẫn là những người tiếp tục duy trì và mở rộng nó. Chân dung toán học mang gương mặt con người.

Các nhà khoa học về nhận thức đã đưa ra những kết luận của mình dựa vào cái mà họ gọi là một hiện thân hấp dẫn các bằng chứng được rút ra từ kết quả của rất nhiều thí nghiệm. Một số thí nghiệm này liên quan đến việc nghiên cứu sự tạo ảnh chức năng của bộ não trong quá trình thực hiện các nhiệm vụ toán học. Một số thí nghiệm khác khảo sát năng lực toán học của trẻ em, của các nhóm đi săn theo bầy đàn như người Mundurukú, những người chưa bao giờ đến trường, và của những người bị tổn thương não ở những mức độ khác nhau. Hầu hết các nhà nghiên cứu đều nhất trí rằng một số năng lực toán học dường như là bẩm sinh. Chẳng hạn, mọi người đều có thể chỉ bằng một cái liếc mắt thôi là nói được ngay họ vừa nhìn thấy một, hai, hay ba đồ vật (một khả năng được gọi là *subitizing,* tức là khả năng nhận ra số các vật được trình hiện trong thời gian ngắn ngủi mà không thực sự đếm, gốc từ tiếng Latinh *subito* có nghĩa là bất ngờ). Một phiên bản rất hạn chế của số học, dưới dạng xếp nhóm, xếp cặp, và phép cộng và trừ đơn giản, có thể là bẩm sinh, có lẽ cũng như một số hiểu biết cơ bản về các khái niệm hình học (mặc dù khẳng định này còn gây tranh cãi hơn). Các nhà khoa học thần kinh cũng nhận ra các vùng trong não, chẳng hạn như các nếp góc ở bán cầu não trái, dường như quyết định đến việc xử lý các con số và tính toán toán học, song lại không quyết định đến ngôn ngữ hay ghi nhớ.

Theo Lakoff và Núñez, một công cụ chủ yếu cho sự tiến bộ vượt xa những năng lực bẩm sinh này chính là sự tạo dựng *các ẩn dụ có tính khái niệm* - đó là những quá trình tư duy nhằm diễn giải các khái niệm trừu tượng thành cụ thể hơn. Chẳng hạn, khái niệm số học được đặt trong ẩn dụ rất cơ bản về tập hợp các đối tượng. Mặt khác, đại số học trừu tượng hơn của Boole về các lớp cũng liên kết một cách ẩn dụ các lớp với các con số. Kịch bản tinh tế này được phát triển bởi Lakoff và Núñez cũng đưa ra những hiểu biết sâu sắc rất thú vị về việc tại sao con người lại thấy một số khái niệm toán học phức tạp hơn nhiều so với các khái niệm khác. Một số nhà nghiên cứu khác, như nhà khoa học thần kinh nhận thức Rosemary Varley thuộc Đại học Sheffield, cho rằng ít nhất thì một số cấu trúc toán học sống nhờ vào khả năng ngôn ngữ - những hiểu biết sâu sắc về toán học phát triển là nhờ sự vay mượn các công cụ trí tuệ vốn được sử dụng để xây dựng ngôn ngữ. Các nhà khoa học về nhận thức lấy một trường hợp khá mạnh để gắn toán học với trí tuệ con người và chống lại chủ nghĩa Plato. Dù vậy, điều rất thú vị là: cái mà tôi xem là lý lẽ mạnh nhất có thể chống lại được chủ nghĩa Plato lại không đến từ các nhà sinh học thần kinh, mà lại là từ ngài Michael Atiyah, một trong những nhà toán học vĩ đại nhất của thế kỷ 20. Thực ra, tôi đã nhắc tới đường hướng suy luận của ông một cách ngắn gọn trong Chương 1, nhưng giờ đây tôi muốn trình bày một cách chi tiết hơn.

Nếu bạn phải lựa chọn một khái niệm toán học của chúng ta có xác suất cao nhất là khái niệm tồn tại độc lập với trí tuệ con người, thì bạn sẽ chọn khái niệm nào? Hầu hết mọi người chắc sẽ đều đưa ra kết luận rằng đó phải là các số tự nhiên. Còn điều gì có thể "tự nhiên" hơn 1, 2, 3,...? Thậm chí nhà toán học người Đức nghiêng về trực giác luận là Leopold Kronecker (1823-91) cũng có tuyên bố nổi tiếng: "Chúa đã tạo ra các số tự nhiên, tất cả những thứ còn lại là sản phẩm của con người". Vì vậy nếu người ta có thể chứng minh được rằng ngay cả các số tự nhiên, với tư cách là một khái niệm, cũng bắt nguồn từ trí tuệ con người, thì điều này sẽ là một lập luận hùng hồn nghiêng về phía hình mẫu "phát minh". Và đây, một lần nữa, lại là những gì mà Atiyah lập luận: "Chúng ta hãy hình dung trí tuệ không nằm ở con người, mà là ở con sứa lớn sống đơn độc và biệt lập, ẩn sâu dưới đáy Thái Bình Dương. Nó không trải nghiệm với các vật thể riêng rẽ nào, mà chỉ với nước bao quanh. Chuyển động, nhiệt độ và áp suất sẽ cung cấp cho nó những dữ liệu cảm nhận cơ bản. Trong một môi trường liên tục thuần khiết như vậy, sự gián đoạn, rời rạc sẽ không xuất hiện và do đó sẽ chẳng có gì để mà đếm cả". Nói cách khác, Atiyah đã xác tín rằng ngay cả một khái niệm cơ bản như các số tự nhiên cũng đã được *sáng tạo* bởi con người, bằng việc trừu tượng hóa (còn các nhà khoa học về nhận thức thì nói là, "thông qua các ẩn dụ") các yếu tố của thế giới vật lý. Nói một cách khác, số 12, chẳng hạn, biểu thị sự trừu tượng hóa một tính chất chung cho mọi thứ tạo thành một tá, tương tự như từ "tư duy" biểu thị cho một chuỗi những quá trình nảy sinh trong bộ não của chúng ta.

Bạn đọc có thể phản đối việc sử dụng vũ trụ giả thuyết của con sứa để chứng minh quan điểm này. Các bạn có thể cãi lý rằng chỉ có một vũ trụ duy nhất, vũ trụ tự nhiên, và rằng mọi giả thuyết đều cần phải được kiểm chứng trong cái vũ trụ đó. Tuy nhiên, điều này sẽ lại tương đương với việc thừa nhận rằng khái niệm các số tự nhiên, thực tế, lại phụ thuộc vào vũ trụ của kinh nghiệm con người ! Lưu ý rằng điều này chính xác là cái mà Lakoff và Núñez muốn nói khi họ xem toán học như là "được hiện thân".

Tôi vừa lập luận rằng các khái niệm toán học của chúng ta bắt nguồn từ trí tuệ con người. Bạn có thể băn khoăn tự hỏi tại sao tôi lúc trước lại khăng khăng rằng hầu hết toán học thực tế là đã được khám phá ra, một quan điểm dường như là khá gần với những người theo chủ nghĩa Plato.

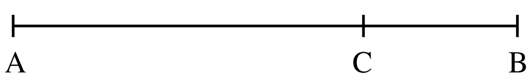
Phát minh *và* khám phá

Trong ngôn ngữ hằng ngày của chúng ta, sự phân biệt giữa khám phá và phát minh đôi khi thật rõ ràng, nhưng đôi khi cũng khá là mơ hồ. Không ai nói rằng Shakespeare đã khám phá ra Hamlet, hay Madame Curie đã phát minh ra nguyên tố phóng xạ rađi. Đồng thời, những loại dược phẩm mới dùng cho một số loại bệnh nhất định cũng thường được thông báo như là các khám phá, mặc dù chúng thường liên quan đến sự tổng hợp tinh xảo các hợp chất hóa học mới. Tôi muôn mô tả chi tiết hơn một chút về một ví dụ cụ thể trong toán học, mà tôi tin là không chỉ giúp ta phân biệt sự khác nhau giữa phát minh và khám phá mà còn tạo nên những hiểu biết sâu sắc có giá trị về quá trình mà theo đó toán học tiến hóa và phát triển.

Trong quyển VI của bộ *Cơ sở*, tác phẩm đồ sộ của Euclid về hình học, ta tìm thấy một định nghĩa về sự phân chia một đoạn thẳng thành hai phần không bằng nhau (một định nghĩa khác sớm hơn, thông qua các diện tích, xuất hiện ở quyển II). Theo Euclid, nếu đoạn AB được chia bởi điểm C (H. 62) theo cách sao cho tỷ số độ dài của hai đoạn được chia (AC/CB) bằng tỷ số của cả đoạn thẳng ban đầu và đoạn được chia có chiều dài lớn hơn (AB/AC), thì khi đó người ta nói rằng đoạn thẳng được chia theo "trung và ngoại tỷ". Nói cách khác, nếu AC/CB = AB/AC thì mỗi một tỷ số này được gọi là "trung và ngoại tỷ". Từ thế kỷ 19, tỷ số này thường được biết đến với cái tên *tỷ lệ vàng*. Chỉ bằng một số phép tính đại số đơn giản có thể chứng tỏ rằng tỷ lệ vàng bằng:

$$(1+\sqrt{5})/2 = 1,6180339887...$$

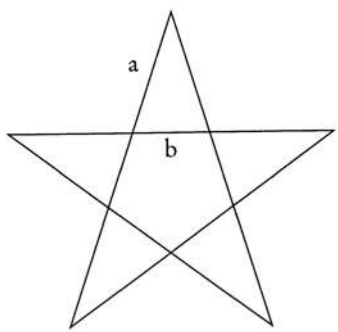
Câu hỏi đầu tiên mà bạn có thể hỏi là tại sao Euclid lại bận tâm đến việc định nghĩa sự phân chia đoạn thẳng cụ thể này và thậm chí còn đặt tên cho tỷ lệ đó nữa? Xét cho cùng thì có vô số các cách để phân chia một đoạn thẳng. Trả lời cho câu hỏi này có thể được tìm thấy trong di sản văn hóa, huyền thoại về Pythagoras và Plato. Hãy nhớ lại rằng các môn đệ của Pythagoras bị ám ảnh bởi các con số như thế nào. Họ coi các số lẻ như là nam tính và tốt, và định kiến hơn, họ xem các số chẵn như là nữ tính và xấu xa.



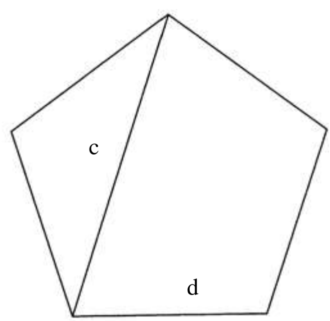
Hình 62

Họ có tình yêu đặc biệt đối với số 5, là sự hợp nhất của 2 và 3, số chẵn đầu tiên (giống cái) và số lẻ đầu tiên (giống đực). (Số 1 không được xem là một con số, mà là cái sinh ra mọi số). Vì vậy, đối với trường phái Pythagoras thì số 5 tượng trưng cho tình yêu và hôn nhân, và họ sử dụng hình ngôi sao năm cánh (H. 63) như là biểu tượng của tình huynh đệ của họ. Và đây chính là chỗ mà tỷ lệ vàng xuất hiện đầu tiên. Nếu bạn lấy một ngôi sao năm cánh đều, thì tỷ số của cạnh thuộc một tam giác bất kỳ và đáy của nó (*a*/*b* trong H. 63) đúng bằng tỷ lệ vàng. Tương tự như vậy, tỷ số của đường chéo bất kỳ trong một ngũ giác đều với một cạnh của nó (*c*/*d* trong H. 64) cũng đúng bằng tỷ lệ vàng. Thực tế, để dựng một hình ngũ giác đều bằng thước và compa (quá trình dựng hình phổ biến của người Hy Lạp cổ đại) đòi hỏi phải chia một đoạn thẳng theo tỷ lệ vàng.

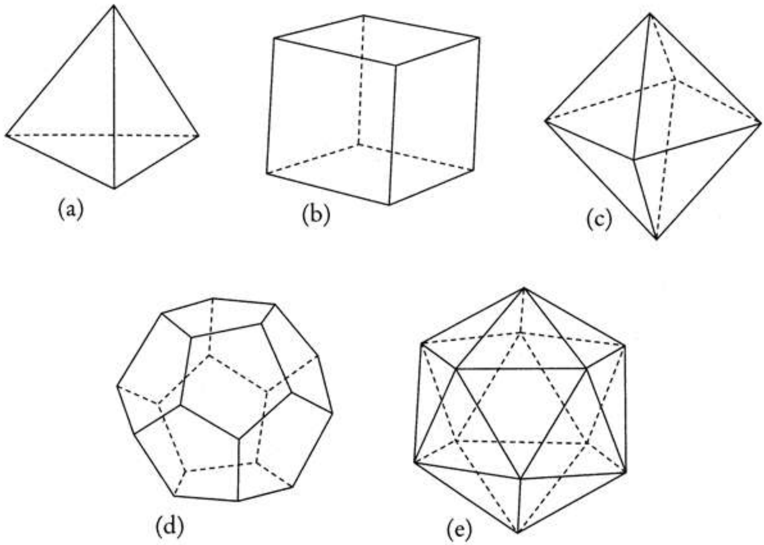
Plato bổ sung thêm một chiều nữa vào ý nghĩa thần thoại của tỷ lệ vàng. Người Hy Lạp cổ đại tin rằng mọi thứ trong vũ trụ đều được cấu tạo bởi bốn yếu tố: đất, lửa, không khí và nước. Trong cuốn *Timaeus*, Plato đã cố gắng giải thích cấu trúc của vật chất



Hình 63



Hình 64



Hình 65

bằng cách sử dụng 5 hình khối đều mà ngày nay mang tên ông - *các hình khối Plato* - (H. 65). Các hình khối lồi này bao gồm khối tứ diện, khối lập phương, khối bát diện, khối 12 mặt, và khối 20 mặt, đó là những hình khối duy nhất mà tất cả các mặt (của mỗi khối riêng rẽ) là như nhau và đều là các đa giác đều, đồng thời các đỉnh của mỗi khối đều nằm trên một mặt cầu. Plato đã gắn mỗi khối trong bốn hình khối đó với một trong bốn yếu tố cơ bản của vũ trụ. Chẳng hạn, Đất thì gắn với khối lập phương vững chãi, lửa sắc sảo thì gắn với tứ diện nhọn, không khí là bát diện, và nước là khối 20 mặt. Về khối 12 mặt (H. 65d), Plato đã viết trong *Timaeus*: "Vì vẫn còn một hình khối phức hợp nữa, hình khối thứ 5, nên Thượng đế đã sử dụng nó cho toàn bộ, thêu dệt nó với các thiết kế của mình". Vì vậy hình khối 12 mặt biểu diễn toàn bộ vũ trụ. Tuy nhiên, lưu ý rằng hình khối 12 mặt, với 12 mặt ngũ giác của nó, có tỷ lệ vàng được viết ở khắp nơi. Cả thể tích và diện tích bề mặt của nó cũng được biểu thị như là những hàm số đơn giản của tỷ lệ vàng (điều này cũng đúng với khối 20 mặt).

Chính vì vậy, lịch sử đã cho thấy rằng bằng nhiều phép thử và sai, các môn đệ của Pythagoras và những người ủng hộ họ *đã khám phá* ra các cách để dựng một số hình hình học, mà đối với họ, chúng biểu thị những khái niệm quan trọng như tình yêu và toàn bộ vũ trụ. Nên không có gì là lạ khi họ, và Euclid (người cung cấp tư liệu về truyền thống này), *đã phát minh ra khái niệm* tỷ lệ vàng liên quan đến các phép dựng hình đó, và đã đặt tên cho nó. Không giống như bất kỳ tỷ lệ tùy ý nào khác, con số 1,618... giờ đã trở thành tâm điểm của một lịch sử nghiên cứu mạnh mẽ và phong phú, và tới tận ngày nay nó vẫn tiếp tục xuất hiện ở những chỗ bất ngờ nhất. Chẳng hạn, hai thiên niên kỷ sau Euclid, nhà thiên văn học người Đức Johannes Kepler *đã khám phá* ra rằng con số này lại xuất hiện một cách thần kỳ, liên quan đến một dãy số được gọi là *dãy Fabonaci*. Dãy Fabonaci: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233,... có đặc điểm là bắt đầu từ số thứ 3, mỗi số bằng tổng của hai số đứng trước nó (ví dụ, 2 = 1 + 1; 3 = 1 + 2; 5 = 2 + 3 và cứ tiếp tục như vậy). Nếu bạn chia mỗi số trong dãy cho số đứng ngay trước nó (ví dụ 144 ÷ 89; 233 ÷ 144;...), bạn sẽ thấy các tỷ số này dao động xung quanh nhưng càng tiến gần đến tỷ lệ vàng khi bạn càng đi xa hơn trong dãy đó. Chẳng hạn, người ta thu được các kết quả sau đây (làm tròn các số đến hàng thập phân thứ 6 sau dấu phẩy): 144 ÷ 89 = 1.617978; 233 ÷ 144 = 1.618056; 377 ÷ 233 = 1.618026 và cứ tiếp tục như vậy.

Trong thời hiện đại hơn, dãy Fabonaci và cả tỷ lệ vàng nữa, còn được thấy trong sự sắp xếp lá của một số loại cây (hiện tượng này được gọi là *phyllotaxis)* và trong cấu trúc các tinh thể của một số hợp kim nhôm.

Tại sao tôi lại coi định nghĩa của Euclid về khái niệm tỷ lệ vàng là một phát minh? Vì chính hành động sáng tạo của Euclid đã chọn ra tỷ lệ này và thu hút sự chú ý của các nhà toán học tới nó. Trái lại, ở Trung Quốc, nơi khái niệm tỷ lệ vàng không được phát minh, các tài liệu toán học về cơ bản không nhắc gì đến nó. Ở Ấn độ, nơi một lần nữa khái niệm này cũng không được phát minh, chỉ có một vài định lý không quan trọng về lượng giác mới liên quan một cách xa xôi với tỷ lệ này.

Có nhiều ví dụ khác cho thấy câu hỏi "toán học là phát minh hay khám phá" vẫn được đặt ra một cách không thích đáng. *Toán học của chúng ta là sự tổ hợp của cả những phát minh và các khám phá*. Các tiên đề của hình học Euclid, với tư cách là một *khái niệm*, là một phát minh, cũng như quy tắc chơi cờ cũng là một phát minh. Các tiên đề cũng được bổ sung bởi một loạt các khái niệm được phát minh như các tam giác, hình bình hành, elíp, tỷ lệ vàng, và v.v. Trái lại, các định lý của hình học Euclid nói chung lại là những khám phá; chúng là những con đường kết nối các khái niệm khác nhau. Trong một số trường hợp, các chứng minh sinh ra các định lý - các nhà toán học khảo sát những cái mà họ có thể chứng minh và từ đó họ rút ra các định lý. Trong một số trường hợp khác, như được mô tả bởi Archimedes trong cuốn *Phương pháp*, họ trước hết tìm ra câu trả lời cho một câu hỏi cụ thể nào đó mà họ quan tâm rồi sau đó họ mới đi tìm cách chứng minh.

Thường thì các khái niệm là các phát minh. Các số nguyên tố, với tư cách *một khái niệm,* là một phát minh, song tất cả các định lý về số nguyên tố lại là những khám phá. Các nhà toán học của Babylon, Ai Cập và Trung Hoa cổ đại chưa bao giờ phát minh ra khái niệm số nguyên tố, mặc dù toán học của họ rất tiến bộ. Vậy thay vì thế, chúng ta có thể nói là họ đã không "khám phá" ra số nguyên tố không? Nói thế cũng chẳng khác gì khi chúng ta nói rằng nước Anh đã không "khám phá" ra một hiến pháp bằng văn bản, duy nhất và được luật hóa. Cũng như một quốc gia có thể tồn tại mà không cần có hiến pháp, toán học vẫn có thể phát triển mà không cần khái niệm về số nguyên tố. Và thực tế đã là như vậy!

Chúng ta có biết tại sao người Hy Lạp cổ đại đã phát minh ra những khái niệm như các tiên đề và số nguyên tố không? Chúng ta không biết chắc chắn, song chúng ta có thể phán đoán rằng đó là một phần trong những nỗ lực không mệt mỏi của họ để nghiên cứu những thành phần cơ bản nhất của vũ trụ. Các số nguyên tố là những viên gạch cơ bản tạo nên các số, cũng như các nguyên tử là những viên gạch tạo nên vật chất. Tương tự như vậy, những tiên đề là suối nguồn mà từ đó được xem là chảy ra mọi chân lý hình học. Hình khối 12 mặt biểu thị toàn bộ vũ trụ và tỷ lệ vàng là khái niệm đã đưa biểu tượng đó vào tồn tại.

Sự bàn luận này làm nổi lên một khía cạnh thú vị khác của toán học - đó là một phần của văn hóa loài người. Một khi người Hy Lạp đã phát minh ra phương pháp tiên đề, thì toàn bộ toán học châu Âu theo sau đều phù hợp với cùng triết học và thực tiễn. Nhà nhân chủng học Leslie A. White (1900-1975) đã từng cố gắng tóm tắt khía cạnh văn hóa này khi viết: "Nếu Newton được nuôi dưỡng trong nền văn hóa Hottentot [một bộ lạc Nam Phi] thì ông chắc đã tính toán như một người Hottentot." Phức hợp văn hóa này của toán học rất có thể là nguyên nhân của thực tế là nhiều khám phá toán học (ví dụ như các bất biến của nút) và thậm chí một số phát minh quan trọng (ví dụ như phép tính vi tích phân) đã được tạo ra đồng thời bởi một số người làm việc độc lập với nhau.

Bạn có biết nói bằng toán học không?

Trong một mục trước, tôi đã so sánh sự nhập của khái niệm trừu tượng con số vào khái niệm ý nghĩa của một từ. Nếu vậy thì phải chăng toán học là một loại ngôn ngữ? Một mặt, những hiểu biết sâu sắc từ lôgic toán và mặt khác, từ ngôn ngữ học cho thấy rằng ở một chừng mực nào đó thì đúng là như vậy. Các công trình của Boole, Frege, Peano, Russell, Whitehead, Gôdel, và những người ủng hộ đương đại của họ (đặc biệt là trong các lĩnh vực như cú pháp và ngữ nghĩa học triết học, và tương đồng trong ngôn ngữ học), đã chứng tỏ rằng ngữ pháp và suy luận có quan hệ mật thiết với đại số học của lôgic ký hiệu. Nhưng tại sao có tới hơn 6.500 ngôn ngữ trong khi lại chỉ có một toán học? Thực ra thì tất cả những ngôn ngữ khác nhau đều có nhiều đặc tính thiết kế chung. Chẳng hạn, nhà ngôn ngữ học người Mỹ Charles F. Hockett (1916-2000) đã hướng sự chú ý của những năm 1960 tới thực tế rằng mọi ngôn ngữ đều có những phương thức lập sẵn cho việc tạo nên các từ và cụm từ mới (như "*home page*" (trang chủ), "*laptop*" (máy tính xách tay); "*indie flick*" (buổi chiếu phim độc lập); và đại loại như vậy). Tương tự, mọi ngôn ngữ của con người đều tính đến sự trừu tượng hóa (như "*surrealism*" (chủ nghĩa siêu thực), "*abssence*" (sự thiếu vắng), "*greatness*" (sự vĩ đại); sự phủ định ("not" (không), "hasn't"), và những câu giả định ("Nếu bà có bánh xe thì bà đã có thể là chiếc xe buýt rồi). Có lẽ hai trong số những đặc tính quan trọng của mọi ngôn ngữ là *đuôi mở* và *tự do-kích thích*. Tính chất thứ nhất biểu thị khả năng sáng tạo ra những lời nói chưa bao giờ được nghe trước đây và khả năng hiểu được những lời đó. Chẳng hạn, tôi có thể dễ dàng viết một câu như sau: "Bạn không thể sửa chữa đập ngăn nước Hoover bằng kẹo cao su được" và mặc dù thậm chí bạn có thể chưa bao giờ gặp câu nói này trước đây, nhưng bạn vẫn dễ dàng hiểu được nó. Tự do-kích thích là khả năng lựa chọn nên đáp ứng như thế nào đối với một kích thích nhận được. Chẳng hạn, câu trả lời cho câu hỏi do ca sỹ/nhạc sỹ Carole King đặt ra trong bài hát của bà "*Ngày mai anh vẫn sẽ còn yêu em chứ?*" có thể là bất kỳ câu trả lời nào sau đây: "Anh không biết liệu anh có còn sống đến ngày mai không"; "Tất nhiên rồi"; "Anh thậm chí không yêu em hôm nay"; "Không nhiều bằng anh yêu con chó của anh"; "Đây quả là một bài hát hay nhất của em"; hay thậm chí "Anh tự hỏi ai sẽ thắng ở giải Úc mở rộng năm nay". Bạn sẽ nhận thấy rằng nhiều đặc tính trong số này (chẳng hạn như trừu tượng hóa; phủ định; mở; và khả năng tiến hóa) cũng là đặc tính của toán học.

Như tôi đã nói trước đây, Lakoff và Núñez đã nhấn mạnh vai trò của ẩn dụ trong toán học. Các nhà ngôn ngữ học nhận thức cũng cho rằng mọi ngôn ngữ của loài người đều sử dụng những ẩn dụ để biểu đạt hầu như mọi thứ. Thậm chí có lẽ còn quan trọng hơn, kể từ năm 1957, năm mà nhà ngôn ngữ học nổi tiếng Noam Chomsky cho xuất bản tác phẩm mang tính cách mạng của mình *Những cấu trúc cú pháp*, rất nhiều nỗ lực ngôn ngữ học đã xoay quanh khái niệm *ngữ pháp phổ quát* - những nguyên lý chi phối mọi ngôn ngữ. Nói cách khác, cái dường như là Tháp Babel của tính đa dạng có lẽ đã thực sự che giấu một sự tương đồng đáng kinh ngạc về cấu trúc. Thực tế, nếu không phải như vậy thì các từ điển dịch từ ngôn ngữ này sang ngôn ngữ khác đã không bao giờ thực hiện được.

Bạn có thể vẫn còn băn khoăn tại sao toán học lại thống nhất như vậy, cả về phương diện chủ đề lẫn phương diện ký hiệu. Phần đầu của câu hỏi này đặc biệt hấp dẫn. Hầu hết các nhà toán học đều nhất trí rằng toán học như chúng ta biết đã tiến hóa từ những nhánh cơ bản của hình học và số học được thực hiện bởi những người Babylon, Hy Lạp và Ai Cập cổ đại. Tuy nhiên, liệu có thực sự là tất yếu rằng toán học phải khởi đầu từ những môn học cụ thể này hay không? Nhà khoa học máy tính Stephen Wolfram đã lập luận trong cuốn sách đồ sộ của mình nhan đề *Một loại khoa học mới* rằng không nhất thiết như vậy. Đặc biệt, Wolfram đã cho thấy làm thế nào xuất phát từ các tập hợp những quy tắc đơn giản có tác dụng giống như những chương trình máy tính ngắn gọn (được gọi là các *automat tế bào*), người ta có thể phát triển được một loại toán học hoàn toàn khác. Các automat này có thể được sử dụng (ít nhất là về nguyên tắc) như là các công cụ cơ bản để mô hình hóa các hiện tượng tự nhiên, thay cho các phương trình vi phân đã từng thống trị khoa học trong suốt ba thế kỷ. Vậy thì điều gì đã dẫn dắt các nền văn minh cổ đại tiến tới khám phá và phát minh ra cái "kiểu" toán học đặc biệt của chúng ta? Tôi thực sự không biết, song có thể nó liên quan nhiều đến các đặc điểm của hệ thông cảm nhận của con người. Con người phát hiện và cảm nhận các cạnh, các đường thẳng và các đường cong trơn một cách rất dễ dàng. Chẳng hạn, hãy chú ý xem bạn có thể xác định (chỉ bằng mắt thôi) một đường có đúng là thẳng hay không chính xác đến mức nào, hoặc bạn có thể dễ dàng phân biệt như thế nào giữa một đường tròn và một hình trông có vẻ hơi elíp. Những khả năng nhận thức này có thể có tác dụng mạnh mẽ trong việc làm hình thành kinh nghiệm của con người về thế giới, và vì vậy có thể dẫn tới một kiểu toán học dựa trên những đối tượng rời rạc (số học) và các hình hình học (hình học Euclid). Tính thống nhất trong ký hiệu có nhiều khả năng là kết quả của cái mà ta có thể gọi là "hiệu ứng Microsoft Window": Toàn bộ thế giới sử dụng hệ điều hành của Microsoft - không phải bởi vì sự tuân thủ này là tất yếu, mà chỉ là vì một khi một hệ điều hành bắt đầu thống trị thị trường máy tính thì mọi người phải chấp nhận nó để dễ dàng liên lạc và bởi vì sự sẵn có của sản phẩm. Tương tự như vậy, ký hiệu phương Tây đã áp đặt sự thống nhất trên toàn thế giới toán học.

Một điều hấp dẫn là, các nhà thiên văn học và vật lý thiên văn vẫn còn tiếp tục đóng góp cho câu hỏi "phát minh và khám phá" theo những cách rất thú vị. Những nghiên cứu mới nhất về các hành tinh ngoài hệ Mặt trời chỉ ra rằng khoảng 5% các ngôi sao có ít nhất một hành tinh khổng lồ (như Mộc tinh trong hệ Mặt trời của chúng ta) quay xung quanh, và tỷ phần đó vẫn còn gần như không thay đổi, khi tính trung bình trên toàn dải Ngân Hà. Trong khi đó tỷ phần chính xác của *các hành tinh kiểu Trái đất* vẫn chưa được biết, song vẫn có cơ may vì thiên hà này có tới hàng tỷ các hành tinh như vậy. Ngay cả nếu chỉ một tỷ phần nhỏ (nhưng không phải là không đáng kể) các "Trái đất" này ở trong *vùng có thể ở được* (phạm vi quỹ đạo cho phép có nước lỏng trên bề mặt của hành tinh) xung quanh những ngôi sao chủ của chúng, thì xác suất có sự sống nói chung và sự sống có trí tuệ nói riêng, phát triển trên bề mặt của các hành tinh này sẽ không phải là zero. Nếu phát hiện được một dạng sự sống có trí tuệ khác mà chúng ta có thể liên lạc được thì chúng ta có thể sẽ có những thông tin vô giá về những hình thức luận được phát triển bởi nền văn minh này để giải thích vũ trụ. Khi đó, chúng ta không chỉ sẽ tiến một bước không thể tưởng tượng được trong sự hiểu biết về nguồn gốc và tiến hóa của sự sống, mà chúng ta thậm chí còn có thể so sánh lôgic của mình với hệ thống lôgic của các sinh vật có thể còn tiến bộ hơn.

Trong một ghi chép có nhiều tính tư biện, một số kịch bản trong vũ trụ học (ví dụ, một kịch bản có tên là *lạm phát vĩnh cửu*) đã dự đoán khả năng tồn tại của các đa vũ trụ. Một vài vũ trụ này có thể không chỉ được đặc trưng bởi các giá trị khác nhau của *các hằng số của tự nhiên* (ví dụ như cường độ của các lực khác nhau; tỷ lệ khối lượng giữa các hạt hạ nguyên tử), mà còn bởi các quy luật khác nhau của tự nhiên nữa. Nhà vật lý thiên văn Max Tegmark đã cho rằng lẽ ra nên có một vũ trụ tương ứng với (hay theo ngôn từ của ông *là*) mỗi cấu trúc toán học khả dĩ. Nếu điều này là đúng thì đây sẽ là một phiên bản cực đoan của quan điểm "vũ trụ *là* toán học" - không chỉ có một thế giới có thể đồng nhất với toán học mà là toàn bộ tập hợp của chúng. Thật không may là, không chỉ tư biện này là quá cấp tiến và hiện còn chưa được kiểm chứng, mà nó còn dường như (ít nhất là dưới dạng đơn giản nhất của nó) mâu thuẫn với cái được gọi là *nguyên lý của tính thông thường*. Như tôi đã mô tả ở Chương 5, nếu bạn lấy một người ngẫu nhiên trên đường phố, thì bạn sẽ có 95% cơ may là chiều cao của người đó sẽ nằm giữa hai độ lệch chuẩn tính từ chiều cao trung bình. Một lập luận tương tự cũng có thể được áp dụng cho các tính chất của vũ trụ. Nhưng số các cấu trúc toán học khả dĩ tăng khủng khiếp cùng với sự phức tạp tăng. Điều này có nghĩa là hầu hết cấu trúc "bình thường" (gần với trung bình) cũng sẽ phức tạp một cách không thể tin nổi. Điều này dường như là kỳ quặc so với tính đơn giản tương đối của toán học và các lý thuyết của chúng ta về vũ trụ, và như vậy thì trái với kỳ vọng tự nhiên là vũ trụ của chúng ta phải là một vũ trụ điển hình.

Câu đố của Wigner

"Toán học được phát minh hay khám phá?" là một câu hỏi được đặt sai bởi vì nó hàm ý rằng câu trả lời phải hoặc là cái này hoặc là cái kia và hai khả năng này loại trừ lẫn nhau. Thay vì thế, tôi đề nghị rằng toán học một phần là được phát minh và một phần được khám phá. Con người nhìn chung phát minh ra các khái niệm toán học và khám phá ra mối quan hệ giữa các khái niệm đó. Một số khám phá có tính kinh nghiệm chắc chắn là đã có trước khi hình thành các khái niệm, song bản thân các khái niệm chắc chắn đã mang đến một động lực để có thêm nhiều định lý được khám phá. Tôi cũng cần lưu ý rằng một số nhà triết học của toán học, như Hilary Putnam người Mỹ, đã chấp nhận một quan điểm trung gian được gọi là *chủ nghĩa hiện thực* - họ tin vào tính khách quan của các biện luận toán học (tức là, các mệnh đề là đúng hoặc sai, và điều khiến cho chúng là đúng hay sai thì ở bên ngoài con người) nhưng lại không cam kết về sự tồn tại của “các đối tượng toán học” như những môn đệ của Platon. Có những hiểu biết sâu sắc nào trong số này cũng dẫn tới một sự giải thích thỏa đáng câu đố về “tính hiệu quả đến phi lý” của Wigner hay không?

Trước hết tôi xin tóm tắt một vài giải pháp tiềm năng được một số nhà tư tưởng đương thời đưa ra. Người đoạt giải Nobel vật lý David Gross viết:

> Một quan điểm mà, từ kinh nghiệm của tôi, là không hề bất thường giữa các nhà toán học sáng tạo - cụ thể là các cấu trúc toán học mà họ đạt tới không phải là những sáng tạo của trí tuệ con người mà thực ra lại có tính tự nhiên như thể chúng là thực như các cấu trúc được các nhà vật lý tạo ra để mô tả cái được gọi là thế giới thực. Nói cách khác, các nhà toán học không phát minh ra toán học mới, mà họ khám phá ra nó. Nếu đúng như vậy thì có lẽ một số bí ẩn mà chúng ta đang khám phá [như “tính hiệu quả đến phi lý”] sẽ trở nên hơi ít bí ẩn hơn. Nếu toán học là các cấu trúc và các cấu trúc này là một phần thực của thế giới tự nhiên, thực như các khái niệm của vật lý lý thuyết, thì sẽ không có gì đáng ngạc nhiên rằng nó là một công cụ hiệu quả trong việc phân tích thế giới thực.

Nói cách khác, ở đây Gross dựa vào một phiên bản của quan điểm “toán học như là sự khám phá” nằm ở đâu đó giữa thế giới Platonic và thế giới “vũ trụ *là* toán học”, song gần với quan điểm Platonic hơn. Tuy nhiên, như chúng ta đã thấy, hỗ trợ về mặt triết học cho tuyên bố “toán học như là sự khám phá là rất khó khăn”.

Hơn nữa, chủ nghĩa Plato không thể thực sự giải quyết được vấn đề về độ chính xác phi thường mà tôi đã mô tả ở Chương 8, một quan điểm mà Gross đã thừa nhận.

Ngài Michael Atiyah, mà tôi rất ủng hộ quan điểm của ông về bản chất của toán học, đã biện luận như sau:

> Nếu người ta xem xét bộ não trong bối cảnh tiến hóa của nó thì thành công đầy bí ẩn của toán học trong các khoa học tự nhiên ít nhất cũng đã được giải quyết một phần nào. Bộ não tiến hóa là để ứng phó với thế giới tự nhiên, và vì vậy không nên quá kinh ngạc là nó đã phát triển một ngôn ngữ, toán học, phù hợp tốt với mục đích đó.

Đường hướng suy luận này rất tương tự với các giải pháp do các nhà khoa học về nhận thức đề xuất. Tuy nhiên, Atiyah cũng thừa nhận rằng giải thích này khó có thể giải quyết được những phần gai góc hơn của vấn đề - làm thế nào mà toán học giải thích được những khía cạnh bí ẩn hơn của thế giới tự nhiên. Đặc biệt, giải thích này còn để lại câu hỏi về cái mà tôi gọi là tính hiệu quả "thụ động" (những khái niệm toán học tìm kiếm những ứng dụng rất lâu sau khi được phát minh ra) hoàn toàn bỏ ngỏ. Atiyah viết: "Những người hoài nghi có thể chỉ ra rằng cuộc đấu tranh sinh tồn chỉ đòi hỏi chúng ta phải đối mặt với các hiện tượng vật lý ở thang bậc con người, trong khi lý thuyết toán học dường như giải quyết thành công ở mọi thang bậc từ nguyên tử cho đến thiên hà". Và ông chỉ khuyến nghị: "Có lẽ sự giải thích nằm trong bản chất có tôn ti thứ bậc trừu tượng của toán học cho phép chúng ta chuyển lên, chuyển xuống các thang của vũ trụ một cách tương đối dễ dàng.

Nhà toán học và khoa học máy tính người Mỹ là Richard Hamming (1915-98) đã có một cuộc thảo luận khá thú vị và rất sâu rộng về câu đố của Wigner vào năm 1980. Trước hết, về câu hỏi bản chất của toán học, ông kết luận rằng "toán học được tạo bởi con người và do đó có thể thay đổi khá liên tục bởi con người". Sau đó, ông đề xuất bốn cách giải thích tiềm tàng cho tính hiệu quả đến phi lý của toán học: (1) các hiệu ứng lựa chọn; (2) sự tiến hóa của các công cụ toán học; (3) sức mạnh giải thích có giới hạn của toán học; (4) sự tiến hóa của con người.

Hãy nhớ lại rằng hiệu ứng lựa chọn là những sai lệch được đưa vào các kết quả của thí nghiệm hoặc là do các công cụ được sử dụng hoặc do cách thức thu thập dữ liệu. Chẳng hạn, nếu trong một kiểm chứng về tính hiệu quả của một chương trình ăn kiêng, nhà nghiên cứu loại đi những người rút khỏi cuộc thử nghiệm, thì điều này sẽ làm thiên lệch kết quả, vì hầu hết những người bỏ cuộc là những người mà đối với họ chương trình không hiệu quả. Nói cách khách, Hamming đề xuất rằng ít nhất trong một số trường hợp, "hiện tượng ban đầu nảy sinh từ những công cụ toán học mà chúng ta sử dụng chứ không phải từ thế giới thực... thì rất nhiều thứ mà chúng ta nhìn thấy là từ cái kính mà chúng ta đang đeo". Để làm ví dụ, ông chỉ ra một cách đúng đắn rằng người ta có thể chứng minh mọi lực phát ra một cách đối xứng từ một điểm (và bảo toàn năng lượng) trong không gian ba chiều sẽ hành xử theo quy luật nghịch đảo bình phương, và vì vậy khả năng áp dụng định luật vạn vật hấp dẫn của Newton là không có gì phải ngạc nhiên. Quan điểm của Hamming được cho là hay, song các hiệu ứng lựa chọn có thể rất khó giải thích được độ chính xác tuyệt vời của một số lý thuyết.

Giải pháp tiềm tàng thứ hai của Hamming dựa trên thực tế rằng con người lựa chọn, và liên tục cải tiến toán học, để cho phù hợp với một tình huống đã cho. Nói cách khác, Hamming cho rằng chúng ta đang chứng kiến cái mà chúng ta có thể gọi là "sự tiến hóa và chọn lọc tự nhiên" của các ý tưởng toán học - loài người phát minh ra một số lượng lớn các khái niệm toán học, và chỉ những khái niệm nào phù hợp mới được lựa chọn. Trong nhiều năm, tôi cũng đã từng tin rằng đây là một giải thích hoàn chỉnh. Một lý giải tương tự cũng đã được đề xuất bởi nhà vật lý đoạt giải Nobel Steven Weinberg trong cuốn *Những giấc mơ về một lý thuyết cuối cùng* của ông. Nhưng liệu đó đã là sự giải đáp *dứt điểm* cho câu đố của Wigner hay chưa? Không nghi ngờ gì rằng sự tiến hóa và lựa chọn như vậy đã thực sự diễn ra. Sau khi sàng lọc qua nhiều hình thức luận và công cụ toán học, các nhà khoa học giữ lại những thứ hiệu quả, và họ không ngần ngại nâng cấp chúng hoặc thay đổi chúng thành những cái tốt hơn. Song ngay cả nếu chúng ta chấp nhận ý tưởng này, thì tại sao lại có những lý thuyết toán học có thể giải thích được cả vũ trụ?

Quan điểm thứ ba của Hamming cho rằng ấn tượng của chúng ta về tính hiệu quả của toán học có thể, trong thực tế, chỉ là một ảo tưởng, vì có nhiều thứ trong thế giới xung quanh chúng ta mà toán học thực sự chưa giải thích được. Ủng hộ cho quan điểm này, để làm ví dụ, tôi xin lưu ý rằng nhà toán học Israêl Moseevich Gelfand đã từng được trích lời phát biểu sau: "Chỉ có một thứ phi lý hơn tính hiệu quả đến phi lý của toán học trong vật lý học, và đó là *tính phi hiệu quả* đến phi lý [nhấn mạnh của tác giả] của toán học trong sinh học". Tôi không nghĩ là điều này tự thân nó có thể giải thích được vấn đề của Wigner. Sự thật là không giống như *Cẩm nang cho những người xin quá giang tới thiên hà*[1], chúng ta không thể nói rằng câu trả lời cho sự sống, cho vũ trụ và mọi thứ là bốn mươi hai. Tuy nhiên, có một số lượng đủ lớn các hiện tượng mà toán học đã thực sự *làm* sáng tỏ được để bảo đảm cho một sự giải thích. Hơn nữa thế nữa, phạm vi của các sự kiện và các quá trình mà toán học có thể được lý giải được vẫn tiếp tục được mở rộng.

Giải thích thứ tư của Hamming là rất tương đồng với quan điểm do Atiyah đề xuất, cho rằng "sự tiến hóa theo Darwin sẽ chọn lọc một cách tự nhiên để đảm bảo sống sót những dạng có khả năng cạnh tranh của sự sống, những dạng này đã có trong đầu óc của chúng những mô hình tốt nhất của thực tại - "tốt nhất" ở đây nghĩa là tốt nhất cho sự tồn tại và truyền giống."

Nhà khoa học máy tính Fef Raskin (1943-2005), người đã bắt đầu với dự án Macintosh của hãng Apple, cũng giữ quan điểm tương tự nhưng với sự nhấn mạnh đặc biệt đến vai trò của lôgic. Raskin kết luận rằng

1. Cuốn tiểu thuyết nổi tiếng đã được dựng thành kịch, phim truyền hình *"Cẩm nang cho những người xin quá giang tới thiên hà"* của nhà văn Anh Douglas Adams (xuất bản năm 1979) kể về các nhân vật tới thăm hành tinh Magrathea huyền thoại để tìm hiểu về nền công nghiệp chế tạo các hành tinh nay đã sụp đổ. Ở đó họ gặp Slartibartfast, một người chuyên thiết kế bờ biển của các hành tinh. Thông qua các ghi chép lưu trữ ông kể lại câu chuyện về một chủng tộc siêu thông minh, những người đã chế tạo thành công một máy tính tên là Deep Thought để tính đáp số cho Câu hỏi tối hậu của Sự sống, Vũ trụ và Vạn vật. Khi đáp số được hé lộ ra là 42, thì Deep Thought lại dự đoán rằng một máy tính khác, mạnh hơn chính nó, sẽ được nó thiết kế và chế tạo để tính toán câu hỏi cho đáp số đó. (Sau này dựa vào đó, Adams đã tao ra câu đố 42, một câu đố mà dù được tiếp cận theo nhiều cách khác nhau, thì tất cả đều thu được đáp số là 42) - ND

> Lôgic của con người được áp đặt lên chúng ta bởi thế giới vật lý tự nhiên và do đó phù hợp với nó. Toán học rút ra từ lôgic. Chính vì thế mà toán học phù hợp với thế giới vật lý. Không có bí ẩn gì ở đây cả - mặc dù chúng ta không nên để mất đi cảm giác về sự kỳ diệu và ngạc nhiên đối với bản chất của các sự vật ngay cả khi chúng ta đã hiểu được chúng một cách tốt hơn.

Hamming ít tin hơn, thậm chí bởi sức mạnh lập luận của chính ông. Ông chỉ ra rằng:

> nếu bạn lấy 4000 năm là tuổi của khoa học, nói chung, thì bạn sẽ có được cận trên của 200 thế hệ. Khi xem xét những hậu quả của tiến hóa mà chúng ta đang tìm kiếm thông qua sự lựa chọn những biến thiên may rủi nhỏ, thì đối với tôi, có vẻ như tiến hóa không có thể giải thích được nhiều hơn một phần nhỏ của tính hiệu quả đến phi lý của toán học.

Raskin khăng khăng rằng "cơ sở của toán học được đặt trong tổ tiên chúng ta từ rất lâu về trước, chắc có lẽ cũng đến hàng triệu thế hệ". Tuy nhiên, phải nói ngay rằng tôi không thấy lập luận này thực sự có sức thuyết phục. Ngay cả nếu lôgic đã được nhúng sâu trong não của tổ tiên chúng ta thì cũng khó mà thấy được làm thế nào mà khả năng này lại có thể dẫn đến những lý thuyết toán học trừu tượng của thế giới hạ nguyên tử, chẳng hạn như cơ học lượng tử, những lý thuyết tỏ ra chính xác đến lạ lùng.

Điều đáng kể là Hamming đã kết luận bài báo của mình bằng sự thừa nhận rằng "mọi sự giải thích mà tôi đưa ra khi gộp lại với nhau một cách đơn giản thì lại không đủ để giải thích điều mà tôi muốn lý giải" (mà cụ thể là tính hiệu quả đến phi lý của toán học).

Vì vậy, liệu chúng ta có nên khép lại bằng việc thừa nhận rằng tính hiệu quả đến phi lý của toán học vẫn còn là bí ẩn như khi chúng ta mới bắt đầu xem xét không?

Trước khi từ bỏ, chúng ta hãy cố chắt lọc ra điều cốt lõi của câu đố của Wigner bằng việc xem xét cái được gọi là *phương pháp khoa học*. Trước hết, các nhà khoa học biết về những sự kiện của tự nhiên thông qua một chuỗi những thí nghiệm và quan sát. Những sự kiện đó ban đầu được sử dụng để phát triển một số loại mô hình định tính của các hiện tượng (như Trái đất hút quả táo; các hạt hạ nguyên tử va chạm với nhau có thể sinh ra các hạt khác; vũ trụ đang giãn nở; v.v... Trong nhiều nhánh của khoa học, ngay cả các lý thuyết xuất hiện vẫn có thể còn ở dạng phi toán học. Một trong các ví dụ tốt nhất về một lý thuyết kiểu này có khả năng giải thích mạnh mẽ là thuyết tiến hóa của Darwin. Thậm chí mặc dù chọn lọc tự nhiên không dựa trên một hình thức luận toán học nào, song thành công của nó trong việc làm sáng tỏ nguồn gốc của các loài là rất đáng kể. Trái lại, trong vật lý cơ bản, thường thì bước tiếp theo sẽ liên quan đến những nỗ lực nhằm xây dựng các lý thuyết toán học, định lượng (như thuyết tương đối rộng; điện động lực học lượng tử; lý thuyết dây, v.v.). Cuối cùng, các nhà nghiên cứu sử dụng các mô hình toán học đó để tiên đoán các hiện tượng mới, các hạt mới và những kết quả của các thí nghiệm và quan sát chưa bao giờ-được-thực-hiện-trước-đây. Điều khiến Wigner và Einstein bối rối chính là sự thành công kỳ lạ của hai quá trình sau. Làm thế nào mà có thể hết lần này đến lần khác các nhà vật lý luôn tìm được các công cụ toán học không chỉ giải thích được những kết quả thí nghiệm và quan sát đang hiện hữu mà còn dẫn tới những hiểu biết sâu sắc hoàn toàn mới và những tiên đoán mới?

Tôi sẽ cố gắng trả lời câu hỏi này bằng cách vay mượn một ví dụ tuyệt vời từ nhà toán học Reuben Hersh. Hersh đã đề xuất rằng theo tinh thần của việc phân tích nhiều bài toán như vậy trong toán học (và thực tế là trong vật lý lý thuyết) ta nên xem xét trường hợp đơn giản nhất có thể. Xét thí nghiệm dường như hết sức tầm thường là cho các viên sỏi vào một cái bình không trong suốt. Giả sử đầu tiên bạn bỏ vào bốn viên sỏi trắng, rồi sau bỏ vào bảy viên sỏi đen. Tại một thời điểm nào đó trong lịch sử của mình, loài người nhận thấy rằng vì một số mục đích, họ có thể biểu diễn một tập hợp các viên sỏi có màu sắc nhất định bằng một khái niệm trừu tượng mà họ phát minh ra - một số tự nhiên. Tức là, tập hợp của các viên sỏi trắng có thể gắn với số 4 (hay IIII hay IV hay bất kỳ ký hiệu nào khác được sử dụng vào thời đó) và các viên sỏi đen được gắn với số 7. Thông qua việc thực nghiệm theo kiểu mà tôi vừa mô tả trên đây, loài người cũng khám phá ra rằng một khái niệm khác được phát minh - phép cộng số học - đã biểu diễn đúng đắn hành động vật lý của sự kết tập. Nói cách khác, kết quả của quá trình trừu tượng này được ký hiệu là 4+7 có thể tiên đoán một cách rõ ràng số sỏi cuối cùng có trong bình. Vậy toàn bộ điều này có ý nghĩa là gì? Nó có nghĩa là loài người đã phát triển được một công cụ toán học kỳ diệu, cho phép tiên đoán được một cách đáng tin cậy kết quả của *bất kỳ* thí nghiệm nào thuộc kiểu này! Công cụ này thực sự ít tầm thường hơn người ta tưởng rất nhiều, vì nó lại không vận hành được với các giọt nước, chẳng hạn. Nếu bạn cho bốn giọt nước khác nhau vào bình, sau đó cho tiếp bảy giọt nước nữa, bạn sẽ không nhận được 11 giọt nước khác nhau trong bình. Thực tế, để làm được bất kỳ kiểu tiên đoán nào đối với các thí nghiệm tương tự với chất lỏng (hay khí) loài người phải phát minh ra những khái niệm hoàn toàn khác (như cái cân, chẳng hạn) và nhận ra rằng họ phải cân riêng từng giọt nước hoặc từng thể tích khí.

Bài học ở đây quá rõ ràng. Các công cụ toán học không được lựa chọn một cách tùy tiện mà đúng hơn phải thật chính xác dựa trên khả năng tiên đoán đúng đắn của chúng đối với kết quả của các thí nghiệm hoặc quan sát có liên quan. Vì vậy ít nhất với trường hợp rất đơn giản này, tính hiệu quả của chúng về căn bản là đã được bảo đảm. Loài người không cần phải đoán trước toán học đúng đắn là gì. Tự nhiên đã ưu ái cho họ tha hồ thử và sai để quyết định cái gì là có hiệu quả. Họ cũng không phải sử dụng các công cụ như nhau cho mọi trường hợp. Đôi khi hình thức luận toán học thích hợp với một vấn đề đã cho lại chưa tồn tại và ai đó phải phát minh ra nó (như trường hợp của Newton phát minh ra phép tính vi tích phân, hay các nhà toán học hiện đại phát minh ra các ý tưởng tôpô/hình học khác nhau trong bối cảnh những nỗ lực hiện nay trong lý thuyết dây). Trong những trường hợp khác, hình thức luận đã thực sự tồn tại nhưng ai đó cần khám phá ra rằng đó chính là giải pháp đang chờ đợi bài toán thích hợp (như trong trường hợp Einstein sử dụng hình học Riemann, hay các nhà vật lý hạt sử dụng lý thuyết nhóm). Vấn đề là thông qua sự ham hiểu biết cháy bỏng, sự cố chấp bướng bỉnh, trí tưởng tượng sáng tạo và một quyết tâm mạnh mẽ, loài người đã tìm ra những hình thức luận toán học thích hợp cho việc lập mô hình một số lượng lớn các hiện tượng vật lý.

Một đặc tính của toán học cực kỳ quan trọng đối với cái mà tôi gọi là tính hiệu quả "thụ động", đó là sự đúng đắn về cơ bản là vĩnh cửu của nó. Hình học Euclid vẫn còn là đúng đắn cho đến tận hôm nay như nó đã từng là thế vào năm 300 trước CN. Chúng ta ngày nay hiểu rằng các tiên đề của nó không phải là tất yếu và thay vì biểu thị các chân lý tuyệt đối về không gian, chúng biểu thị các chân lý trong một vũ trụ cụ thể được cảm nhận bởi con người và hình thức luận được con người phát minh ra có liên quan của nó. Tuy nhiên, một khi chúng ta hiểu thấu đáo được bối cảnh giới hạn hơn thì mọi định lý vẫn còn đúng. Nói cách khác, các nhánh của toán học đang được sát nhập thành những nhánh lớn hơn, toàn diện hơn (như hình học Euclid chỉ là một phiên bản khả dĩ của hình học), song tính đúng đắn bên trong mỗi nhánh vẫn được duy trì. Chính tuổi thọ vô hạn này cho phép các nhà khoa học ở bất kỳ thời điểm đã cho nào tìm kiếm những công cụ toán học phù hợp trong toàn bộ kho tàng hình thức luận đã được phát triển.

Ví dụ đơn giản về những viên sỏi trong bình vẫn chưa xử lý được hai yếu tố của câu đố Wigner. Thứ nhất, vẫn còn đó câu hỏi là tại sao trong một số trường hợp, dường như từ lý thuyết chúng ta nhận được độ chính xác cao hơn so với khi chúng ta đặt vào nó? Trong thí nghiệm với các viên sỏi, độ chính xác của kết quả "được tiên đoán" (kết tập các số viên sỏi khác nhau) không tốt hơn độ chính xác của các thí nghiệm dẫn đến sự hình thành nên "lý thuyết" (phép cộng số học) ngay từ ban đầu. Trái lại, trong lý thuyết hấp dẫn của Newton chẳng hạn, độ chính xác của những tiên đoán của nó lại tỏ ra vượt xa độ chính xác của những kết quả quan sát đã dẫn đến lý thuyết này. Tại sao vậy? Một sự xem xét lại ngắn gọn lịch sử của lý thuyết của Newton có thể cung cấp cho ta một sự hiểu biết sâu sắc thêm.

Mô hình địa tâm (coi Trái Đất là trung tâm của vũ trụ - ND) của Ptolemy đã thống trị khoảng 15 thế kỷ. Trong khi mô hình này không hề có tính phổ quát nào - sự chuyển động của mỗi hành tinh được nghiên cứu một cách riêng rẽ - và không hề đề cập đến các nguyên nhân vật lý (như các lực; gia tốc), thì sự phù hợp với các quan sát lại là hợp lý. Nicolaus Copernicus (1473-1543) đã công bố mô hình nhật tâm của mình vào năm 1543, và Galileo, có thể nói rằng, đã đặt nó lên một nền tảng vững chắc. Galileo cũng đã thiết lập những nền tảng cho các định luật của chuyển động. Nhưng chính Kepler mới là người đã rút ra từ quan sát những định luật toán học đầu tiên (dù chỉ là có tính hiện tượng luận) của chuyển động của các hành tinh. Ông đã sử dụng một tập hợp đồ sộ các dữ liệu mà nhà thiên văn Tycho Brahe đã để lại để xác định quỹ đạo của Hỏa tinh. Ông coi hàng trăm trang tính toán liên miên như là "cuộc chiến tranh của tôi với Hỏa tinh[1]". Ngoại trừ hai sai lệch, còn thì quỹ đạo tròn phù hợp với mọi quan sát. Dù vậy, Kepler vẫn chưa hài lòng với lời giải này và về sau ông đã mô tả quá trình tư duy của mình: "Nếu tôi tin rằng chúng ta có thể bỏ qua 8 phút (góc) này [tức là khoảng 1/4 đường kính góc của Mặt trăng tròn], thì tôi sẽ sửa lại giả thiết của tôi... cho phù hợp. Giờ thì vì không được phép như vậy, nên chỉ 8 phút góc đó thôi đã

1. Đây là trò chơi chữ, Mars (Hỏa tinh) trong thần thoại Hy Lạp là thần chiến tranh.

chỉ ra con đường tiến tới cải cách hoàn toàn trong thiên văn học". Những hệ quả của sự tỉ mỉ, cẩn trọng này là rất ấn tượng. Kepler đã suy ra rằng quỹ đạo của các hành tinh không phải hình tròn mà là hình elíp, và ông đã phát biểu thêm hai quy luật định lượng nữa áp dụng được cho *tất cả* các hành tinh. Khi các định luật này kết hợp với các định luật của Newton về chuyển động, chúng trở thành cơ sở cho định luật vạn vật hấp dẫn của Newton. Tuy nhiên, hãy nhớ lại cái cách mà Descartes đưa ra lý thuyết của mình về lốc xoáy, trong đó các hành tinh được mang đi quanh Mặt trời bởi lốc xoáy của các hạt chuyển động tròn. Lý thuyết này đã không đi được xa, ngay cả trước khi Newton chứng minh nó mâu thuẫn, vì Descartes không bao giờ phát triển một cách xử lý toán học hệ thống cho các lốc xoáy của mình.

Vậy chúng ta học được gì từ lịch sử ngắn ngủi này? Không thể nghi ngờ gì rằng định luật vạn vật hấp dẫn của Newton chính là sản phẩm của một thiên tài. Song thiên tài ấy không thể hoạt động trong chân không được. Một số nền tảng đã được lát đặt một cách cẩn thận bởi các nhà khoa học trước đó. Như tôi đã lưu ý ở Chương 4, ngay cả những nhà toán học kém hơn Newton rất nhiều, như kiến trúc sư Christopher Wren và nhà vật lý Robert Hooke, cũng đã đề xuất một cách độc lập về định luật hấp dẫn nghịch đảo bình phương. Sự vĩ đại của Newton thể hiện ở khả năng độc nhất vô nhị của ông trong việc tổ hợp tất cả chúng lại với nhau tạo nên một thuyết thống nhất và ở sự kiên định của ông trong việc cung cấp một chứng minh toán học cho hệ quả của lý thuyết đó. Tại sao hình thức luận này lại chính xác đến như vậy? Một phần là vì nó giải quyết được vấn đề cơ bản nhất - lực giữa hai vật thể hấp dẫn nhau và chuyển động kết quả. Không có những yếu tố làm phức tạp hóa nào khác tham gia vào. Chính đối với vấn đề này và chỉ vấn đề này thôi mà Newton đã thu được một lời giải hoàn chỉnh. Vì vậy, lý thuyết cơ bản là cực kỳ chính xác song các ứng dụng của nó phải trải qua một quá trình tinh lọc liên tục. Hệ Mặt trời được cấu tạo bởi hơn hai thiên thể. Khi tính đến cả tác dụng của các hành tinh khác (vẫn theo định luật nghịch đảo bình phương), các quỹ đạo sẽ không còn là những hình elíp đơn giản nữa. Chẳng hạn, quỹ đạo của Trái đất được tìm thấy là sẽ thay đổi dần định hướng của nó trong không gian, trong một chuyển động được gọi là *tiến động*, tương tự như chuyển động được biểu hiện bởi trục của một con quay. Trong thực tế, những nghiên cứu hiện đại cho thấy, trái với những kỳ vọng của Laplace, quỹ đạo của các hành tinh có thể cuối cùng sẽ trở nên hỗn độn. Tất nhiên, bản thân lý thuyết cơ bản của Newton sau này được xếp gộp vào thuyết tương đối rộng của Einstein. Và sự xuất hiện của lý thuyết đó cũng đến sau một loạt những khởi đầu sai lầm và ngấp nghé thành công. Vì vậy độ chính xác của một lý thuyết là không thể lường trước được. Qua thử thách mới biết hay dở - những sửa đổi và điều chỉnh vẫn tiếp tục được thực hiện cho đến khi đạt được độ chính xác mong muốn. Một số ít trường hợp mà trong đó đạt được độ chính xác thượng thừa chỉ trong một bước quả là biểu hiện của sự thần kỳ.

Rõ ràng là có một thực tế quan trọng nằm trong nền tảng khiến cho sự tìm kiếm các định luật cơ bản trở nên có giá trị. Quả thực tự nhiên đã rất tử tế với chúng ta khi nó được chi phối bởi các quy luật *phổ quát*, chứ không phải bởi những luật lệ cục bộ nhỏ hẹp. Một nguyên tử hyđro trên Trái đất, ở mép phía bên kia của dải

Ngân hà, hay thậm chí ở trên một thiên hà cách xa 10 tỷ năm-ánh sáng, vẫn hành xử chính xác theo cùng một cách. Và điều đó là đúng ở mọi hướng và tại mọi thời điểm chúng ta quan sát. Các nhà toán học và vật lý đã phát minh ra một thuật ngữ toán học để gán cho các tính chất như vậy; chúng được gọi là *tính đối xứng* và chúng phản ánh tính miễn trừ thay đổi về vị trí, định hướng, hay thời gian mà bạn bấm đồng hồ của mình. Nếu không có những tính đối xứng này (và khác nữa), thì mọi hy vọng giải mã bản thiết kế vĩ đại của tự nhiên sẽ biến mất, vì các thí nghiệm sẽ phải được lặp lại một cách liên tục ở mọi điểm của không gian (nếu sự sống nảy sinh được trong một vũ trụ như vậy). Một đặc tính khác của vũ trụ là những ẩn náu bên trong nền của các lý thuyết toán học được gọi là *tính địa phương*. Điều này phản ánh năng lực của chúng ta trong việc xây dựng nên "bức tranh lớn" giống như trò chơi ghép hình, xuất phát từ sự mô tả những tương tác cơ bản nhất giữa các hạt cơ bản.

Giờ thì chúng ta đi đến yếu tố cuối cùng của câu đố Wigner: Điều gì bảo đảm rằng một lý thuyết toán học rốt cuộc sẽ tồn tại? Nói cách khác, tại sao lại có một lý thuyết tương đối rộng, chẳng hạn? Hay là không thể *không* tồn tại một lý thuyết toán học về hấp dẫn?

Câu trả lời thực sự là đơn giản hơn bạn tưởng. Thực tế không có những đảm bảo gì hết! Vẫn tồn tại vô số những hiện tượng mà đối với chúng không có những dự đoán chính xác nào là khả dĩ, ngay cả là về nguyên tắc. Loại này bao gồm, ví dụ như, nhiều hệ động lực tạo nên *hỗn độn*, trong đó sự thay đổi nhỏ nhất của các điều kiện ban đầu cũng có thể tạo ra những kết quả cuối cùng hoàn toàn khác nhau. Các hiện tượng có thể bộc lộ những hành vi kiểu như vậy gồm có thị trường chứng khoán, hình mẫu thời tiết trên núi Rocky, quả nảy trong máy chơi trò cò quay, khói bay lên từ một điếu thuốc lá, và thực sự là cả quỹ đạo của các hành tinh trong hệ Mặt trời. Nói như vậy không có nghĩa là các nhà toán học không phát triển được những hình thức luận tài tình để có thể giải quyết được một số các khía cạnh quan trọng của những vấn đề này, song chưa có một lý thuyết tất định nào có khả năng tiên đoán là tồn tại cả. Toàn bộ các lĩnh vực xác suất và thống kê đã được sáng tạo ra một cách chính xác nhằm xử lý những lĩnh vực mà trong đó người ta không có một lý thuyết tạo ra được nhiều hơn những thứ mà người ta đặt vào. Tương tự như vậy, một khái niệm được gọi là *độ phức tạp tính toán* vạch ra giới hạn của khả năng của chúng ta trong việc giải quyết những bài toán bằng các giải thuật thực tiễn, và các định lý bất toàn của Gôdel đã đánh dấu những giới hạn nhất định của toán học ngay trong chính bản thân nó. Vì vậy toán học thực sự có hiệu quả phi thường đối với một số mô tả, đặc biệt là về khoa học cơ bản, nhưng toán học không thể mô tả được vũ trụ chúng ta trong tất cả mọi chiều kích của nó. Ở một phạm vi nào đó, các nhà khoa học thường lựa chọn sẽ làm việc trên vấn đề nào là dựa trên cơ sở những vấn đề đó có thể dẫn được đến cách xử lý toán học.

Vậy chúng ta đã giải quyết được dứt điểm bí ẩn của tính hiệu quả của toán học hay chưa? Tôi chắc chắn là đã đưa ra đóng góp tốt nhất của mình, nhưng tôi rất nghi ngờ rằng tất cả mọi người đều đã bị thuyết phục hoàn toàn bởi những lập luận mà tôi đã trình bày rõ ràng trong cuốn sách này. Tuy nhiên, tôi xin trích dẫn lời của Bertrand Russell trong cuốn *Những vấn đề của triết học*:

> Vậy hãy gút lại sự bàn luận của chúng ta về giá trị của triết học; Triết học cần được nghiên cứu không phải vì bất kỳ câu trả lời rõ ràng nào cho các câu hỏi của nó, bởi vì không có những câu trả lời xác định nào, như thường lệ, lại có thể được biết là đúng cả, mà đúng hơn là vì chính bản thân những câu hỏi đó; vì những câu hỏi này mở rộng quan niệm của chúng ta về những cái khả dĩ, làm giàu thêm trí tưởng tượng trí tuệ của chúng ta và làm giảm bớt đi những quả quyết giáo điều bịt kín trí tuệ đối với sự tư biện; nhưng trên hết là vì, thông qua sự vĩ đại của vũ trụ mà triết học chiêm nghiệm, trí óc cũng trở nên rộng lớn hơn, và có thể hợp nhất với vũ trụ làm nên sự tốt đẹp nhất của nó.

CHÚA TRỜI CÓ PHẢI LÀ NHÀ TOÁN HỌC ?

MARIO LIVIO

Phạm Văn Thiều - Phạm Thu Hằng dịch

Chịu trách nhiệm xuất bản: NGUYỄN MINH NHỰT
Biên tập: HẢI VÂN
Bìa: BÙI NAM
Sửa bản in: THANH VIỆT
Trình bày: VŨ PHƯỢNG

NHÀ XUẤT BẢN TRẺ
Địa chỉ: 161B Lý Chính Thắng, Phường 7,
Quận 3, Thành phố Hồ Chí Minh
Điện thoại: (08) 39316289 - 39316211 - 39317849 - 38465596
Fax: (08) 38437450
E-mail: nxbtre@hcm.vnn.vn
Website: www.nxbtre.com.vn

CHI NHÁNH NHÀ XUẤT BẢN TRẺ TẠI HÀ NỘI
Địa chỉ: Phòng 602, số 209 Giảng Võ, Phường Cát Linh,
Quận Đống Đa, Thành phố Hà Nội
Điện thoại: (04) 37734544
Fax: (04) 35123395
E-mail: chinhanh@nxbtre.com.vn

GS. **MARIO LIVIO** là nghiên cứu viên cao cấp về vật lý thiên văn thuộc Viện Khoa học Quản lý Kính thiên văn Không gian Hubble. Ông cũng là trưởng phòng quan hệ công chúng của Viện này. Trước khi vào làm việc tại Viện năm 1991, ông tốt nghiệp ngành vật lý và toán học tại trường Đại học Hebrew ở Jerusalem, lấy bằng thạc sĩ vật lý hạt tại Viện Weizman và bằng tiến sĩ về vật lý thiên văn lý thuyết tại Đại học Tel-Aviv, Israel. Ông là giáo sư thuộc Khoa vật lý của Học viện Công nghệ Technion-Israel từ 1981 đến 1991.

Tình yêu của ông đối với vật lý thiên văn thật mãnh liệt. Ông đặc biệt quan tâm tới sự kết tụ khối lượng của lỗ đen và các sao lùn trắng. Trong khoảng chục năm gần đây ông tập trung nghiên cứu về những vụ nổ sao siêu mới và sử dụng chúng trong vũ trụ học để xác định tốc độ giãn nở của vũ trụ, về bản chất của năng lượng tối, về sự hình thành các lỗ đen, các hành tinh xung quanh các ngôi sao trẻ và về sự sống có trí tuệ trong Vũ trụ. Mario đã công bố hơn 400 bài báo khoa học.

Ngoài những mối quan tâm về khoa học ông còn rất đam mê nghệ thuật. Tủ sách nhà ông có tới hàng trăm cuốn sách về nghệ thuật. Trong ít năm trở lại đây, ông đã kết hợp niềm đam mê khoa học và nghệ thuật của mình trong ba cuốn sách phổ biến khoa học: ***Vũ trụ tăng tốc*** (xuất bản năm 2002) đề cập đến "vẻ đẹp" của các lý thuyết cơ bản về Vũ trụ, ***Tỷ lệ vàng*** (xuất bản năm 2002) kể về một con số đặc biệt với rất nhiều tính chất đáng kinh ngạc và ***Phương trình không thể giải được*** (xuất bản năm 2005) nói về Lý thuyết nhóm – ngôn ngữ của đối xứng – viết dưới dạng phổ biến. Cuốn sách bạn đang cầm trên tay (xuất bản năm 2009) đề cập đến câu hỏi tại sao toán học lại hiệu quả và có sức mạnh ghê gớm trong việc mô tả từ các định luật của tự nhiên cho tới tính chất của các nút thắt. Mario còn là một diễn giả nổi tiếng trước công chúng.

Mario cũng thường xuyên được các phương tiện thông tin đại chúng phỏng vấn. Cuốn sách *Tỷ lệ vàng* (NXB Trẻ) của ông đã được trao Giải thưởng Peano năm 2003 và Giải thưởng quốc tế mang tên Pythagoras năm 2004, là cuốn sách phổ biến hay nhất về toán học.